

Exercice 3.2

Onde cinématique

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 3.2 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On reprend le canal de l'exercice précédent, avec les mêmes valeurs de pente et les mêmes conditions initiales. Dans cet exercice, la hauteur à l'amont du canal augmente linéairement de 1 m à 1,25 m entre $t = 0$ s et $t = 100$ s, puis redescend linéairement de 1,25 m à 1 m entre $t = 100$ s et $t = 200$ s. Le limnigramme amont est donc triangulaire.

1) Donner la formule de la date t_d à laquelle un choc apparaît dans le profil de hauteur ; calculer la date t_d en utilisant les données du Tableau 2.5 et calculer la position du choc à cette date.

2) Tracer dans une feuille de calcul le profil de hauteur en fonction de x et du débit en fonction de x aux dates $t = 150, 300, 450$ et 600 s (on conseille d'exprimer à la fois h et x en fonction de la date t_G à laquelle la caractéristique part de la limite gauche du domaine).

Symbole	Signification	Valeur
b	Largeur du canal	10 m
g	Accélération de la pesanteur	$9,81 \text{ m.s}^{-1}$
K_{Str}	Coefficient de Strickler	40
S_0	Pente du fond du canal	0,1 %, 1 % et 5 %

Tableau 2.1. Paramètres hydrauliques.

2. Réponses

2.1. Question 1

On rappelle que, sous l'hypothèse d'un canal large, la célérité λ de l'onde cinématique est donnée par :

$$\lambda = \frac{5}{3} K_{\text{Str}} S_0^{1/2} h^{2/3} \quad [1]$$

L'augmentation de la hauteur entraîne une augmentation de la célérité d'onde. Le sommet de l'onde voyage plus vite que sa base. Le profil va donc se raidir dans la partie « avant » de l'onde (c'est-à-dire en avant de la crête) et s'étaler dans la partie « arrière » (derrière la crête). A la date t_d , le profil à l'avant de l'onde devient vertical en au moins un point : c'est le début de la formation de l'onde de choc. La vitesse du choc étant par définition inférieure à celle de la partie de l'onde située à gauche, la crête de l'onde finira par « rattraper » le choc (Figure 1).

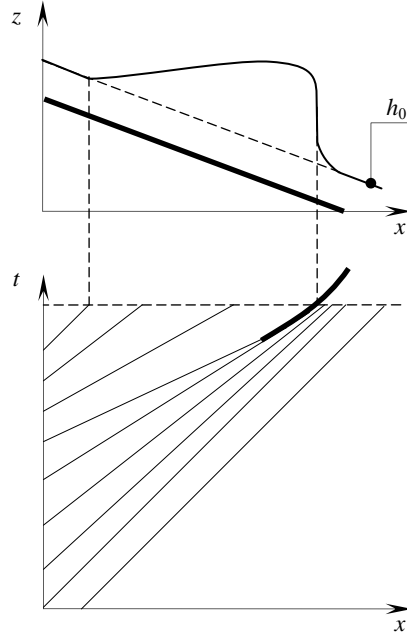


Figure 1. Onde cinématique. Représentation de l'onde de choc résultant d'une augmentation de la hauteur amont dans l'espace physique (haut) et dans l'espace des phases (bas). La trajectoire du choc est représentée par un trait gras dans l'espace des phases.

La date t_d est celle à laquelle le profil $h(x)$ devient vertical, c'est-à-dire la dérivée $\partial h / \partial x$ devient infinie. Il faut donc transformer l'équation de l'onde cinématique en une équation sur la dérivée de h . On rappelle la forme non conservative de l'onde cinématique :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad [2]$$

En dérivant cette équation par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad [3]$$

C'est-à-dire, sous forme caractéristique :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [4]$$

Pour exprimer la dérivée de λ par rapport à x sous une forme « intéressante » pour la résolution, on fait intervenir la dérivée $d\lambda/dh$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} \quad [5]$$

Alors [4] devient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{d\lambda}{dh} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [6]$$

On se souvient par ailleurs que h est constant le long d'une caractéristique (Cf. le chapitre 1). Par conséquent, $d\lambda/dh$ l'est également. L'équation [6] a la solution suivante :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} (t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} (t_G) \right)^{-1} + (t - t_G) \frac{d\lambda}{dh} (t_G) \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [7]$$

où t_G est la date de laquelle la caractéristique part de la limite gauche du domaine. La dérivée $\partial h / \partial x$ devient infinie quand $(\partial h / \partial x)^{-1}$ s'annule. Ceci survient à la date t_d donnée par :

$$t_d = \min \left[t_G - \left(\frac{\partial h}{\partial x} (t_G) \frac{d\lambda}{dh} (t_G) \right)^{-1} \right] \quad [8]$$

D'autre part, la quantité connue à la limite gauche du domaine n'est pas la dérivée $\partial h / \partial x$, mais la dérivée $\partial h / \partial t$. Celle-ci se déduit de $\partial h / \partial x$ par la formule :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial t} \quad [9]$$

L'équation [8] devient donc :

$$t_d = \min \left[t_G + \left(\frac{\partial h}{\partial t} (t_G) \frac{d\lambda}{dh} (t_G) \right)^{-1} \lambda(t_G) \right] \quad [10]$$

Or, d'après les conditions aux limites, on a, entre $t = 0$ et $t = T$:

$$h(t_G) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{T} t_G \quad [11]$$

où h_1 est la hauteur maximale (ici, 1,25 m) et T est la durée de montée du limnigramme. De plus :

$$\frac{d\lambda}{dh} = \frac{2}{3} \frac{\lambda}{h} \quad [12]$$

Donc

$$t_d = \min \left(\frac{5}{2} t_G + \frac{3}{2} \frac{h_0}{h_1 - h_0} T \right) \quad [13]$$

Cette quantité est minimale pour $t_G = 0$. La valeur de t_d est alors :

$$t_d = \frac{3}{2} \frac{h_0}{h_1 - h_0} T \quad [14]$$

On notera que cette valeur ne dépend pas de la pente ni du coefficient de Strickler, mais uniquement de la vitesse de montée du limnigramme et de la condition initiale. Pour les valeurs adoptées ici, on obtient $t_d = 600$ s.

2.2. Question 2

La caractéristique issue de $x = 0$ à la date t_G a pour équation :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(h(t_G)) \quad [15]$$

Par conséquent, les couples (x, h) forment des familles de courbes paramétrées où le paramètre est t_G :

$$\left. \begin{aligned} x(t_G, t) &= \lambda(h(t_G)) t \\ h(t_G, t) &= h(t_G) \end{aligned} \right\} \quad [16]$$

La feuille de calcul jointe permet de tracer les profils de hauteur à différentes dates. La Figure 2 donne le profil $h(x)$ à $t = 600$ s pour $S_0 = 10^{-3}$.

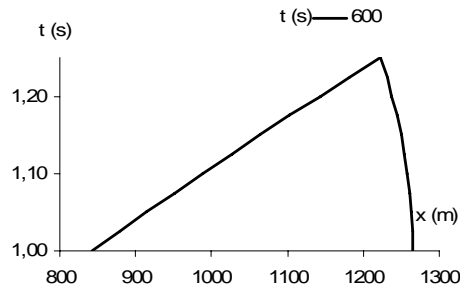


Figure 2. Profil de la profondeur à $t = 600$ s pour une pente de 0,1 %.