

Exercice 1.2

Équation de l'onde cinématique

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 1.2 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

Déterminer l'expression de la célérité λ des ondes dans un chenal de forme trapézoïdale, de largeur au fond b_0 et dont les berges gauche et droite font un angle θ avec la verticale (Figure 1.25). Représenter graphiquement λ en fonction de la profondeur d'eau h pour les valeurs consignées dans le tableau 1.3. A noter que pour $b_0 = 0$, le chenal est triangulaire et que dans ce cas, seuls les angles d'ouverture positifs doivent être considérés.

Symbole	Signification	Valeur
b_0	Largeur du canal au radier	0 m, 10 m, 40 m
K_{Str}	Coefficient de Strickler	40
S_0	Pente du fond du canal	1%
θ_2	Angle des berges avec la verticale	-30°, 0°, 30°, 60°

Tableau 1.3. Paramètres pour le problème 1.2.

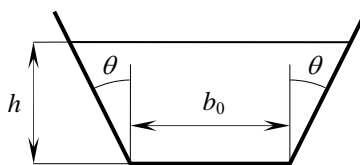


Figure 1.25. Schéma de définition d'un chenal trapézoïdal.

2. Solution

L'expression de la célérité est donnée par la première équation [1.86], que l'on rappelle ici :

$$\lambda = \frac{\partial Q}{\partial A}$$

On rappelle que le débit Q est donné par [1.83], rappelée ici :

$$Q = K_{Str} \frac{A^{5/3}}{\chi^{2/3}} S_0^{1/2}$$

L'expression de Q rend λ difficile à exprimer directement ; en effet, le périmètre mouillé χ est une fonction de la section en travers A . L'expression de cette fonction est relativement complexe. Une « astuce » bien connue consiste à exprimer Q et A en fonction de la profondeur h et de récrire l'expression de λ sous la forme :

$$\lambda = \frac{\partial Q}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial A} = \frac{\partial Q}{\partial h} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)^{-1} \quad [1]$$

La section en travers et le périmètre mouillé s'expriment facilement en fonction de la hauteur d'eau :

$$\left. \begin{aligned} \chi &= b_0 + \frac{2h}{\cos \theta} \\ A &= (b_0 + h \tan \theta)h \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

En substituant [2] dans [1.83], on obtient l'expression du débit :

$$Q = K_{Str} S_0^{1/2} \frac{[(b_0 + h \tan \theta)h]^{5/3}}{\left(b_0 + \frac{2h}{\cos \theta}\right)^{2/3}} \quad [3]$$

En dérivant [2] et [3] par rapport à h , et en remplaçant les dérivées de A et Q dans [1], on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial h} &= b_0 + 2h \tan \theta \\ \frac{\partial Q}{\partial h} &= \frac{K_{Str} S_0^{1/2}}{3} \left[\frac{(b_0 + h \tan \theta)h}{b_0 + \frac{2h}{\cos \theta}} \right]^{2/3} \\ &\quad \times \left(5(b_0 + 2h \tan \theta) + 4 \frac{(b_0 + h \tan \theta)h}{b_0 \cos \theta + 2h} \right) \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution de λ pour $b_0 = 10$ m, $S_0 = 10^{-3}$ et $\theta = 0$. Se reporter à la feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex12.xls> pour le tracé de ce type de graphique.

