

## Exercice 3.4

## Équations de Saint-Venant

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 3.4 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

**1. Rappel de l'énoncé**

On considère le même canal que dans l'exercice 3.1, où l'on applique à présent les équations de Saint-Venant.

1) On suppose la profondeur initiale égale à 1 m. Calculer les célérités d'onde pour les paramètres hydrauliques et les différentes valeurs de pente données dans le Tableau 2.1. Montrer que le régime de l'écoulement est différent selon la valeur de pente utilisée. Donner l'expression de la pente  $S_c$  pour laquelle le régime passe de fluvial à torrentiel.

2) Une perturbation  $\Delta h = 1$  m sur la hauteur d'eau apparaît instantanément en tête du canal. Il se crée une onde de choc qui se propage vers l'aval. En faisant l'hypothèse que le régime est fluvial, donner la valeur de la perturbation  $\Delta Q$  correspondante sur le débit et la vitesse de propagation  $c_s$  de l'onde de choc. Faire l'application numérique pour la pente de 0,1 %.

Symbole	Signification	Valeur
$b$	Largeur du canal	10 m
$g$	Accélération de la pesanteur	9,81 m.s <sup>-1</sup>
$K_{Str}$	Coefficient de Strickler	40
$S_0$	Pente du fond du canal	0,1 %, 1% et 5%

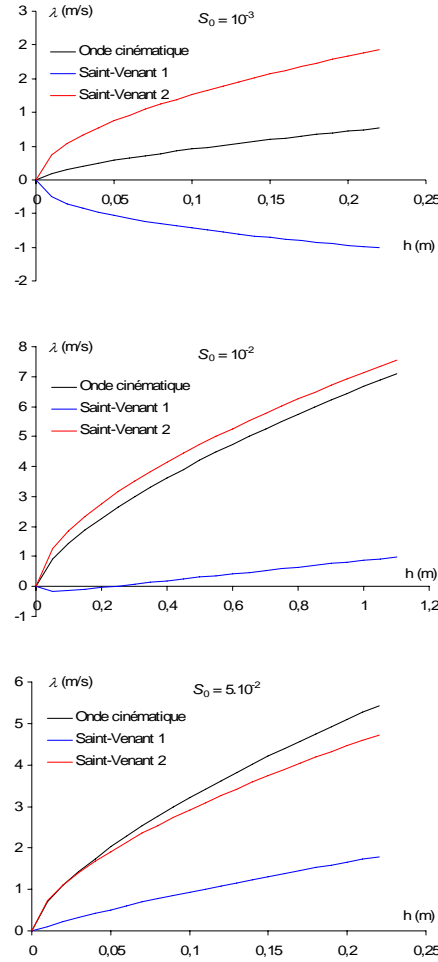
**Tableau 2.1.** Paramètres pour le problème 2.5.

**2. Réponses****2.1. Question 1**

Sous l'hypothèse de régime uniforme, les célérités d'onde sont données par (Cf. Exercice 2.5) :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(1)} &= K_{\text{Str}} S_0^{1/2} h^{2/3} - (gh)^{1/2} \\ \lambda^{(2)} &= K_{\text{Str}} S_0^{1/2} h^{2/3} + (gh)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

La Figure 1 illustre le comportement des trois célérités d'onde pour des pentes de  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  et  $5 \cdot 10^{-2}$ .



**Figure 1.** Évolution des célérités d'onde avec la profondeur pour diverses valeurs de la pente en canal rectangulaire.

La célérité  $\lambda^{(1)}$  s'annule pour une hauteur  $h_c$  donnée par :

$$h_c = \left( \frac{g}{K_{\text{Str}}^2 S_0} \right)^3 \quad [2]$$

Pour les valeurs de  $h$  inférieures à  $h_c$ , l'écoulement est fluvial ; pour des valeurs supérieures à  $h_c$ , le régime est torrentiel. A noter qu'à profondeur donnée, le régime passe de fluvial à torrentiel pour une pente  $S_c$  donnée par :

$$S_c = \frac{g}{K_{\text{Str}}^2 h^{1/3}} \quad [3]$$

Ce qui donne, pour une hauteur  $h = 1$  m et avec les paramètres du Tableau 2.1, une pente critique de  $6.10^{-3}$ , avec une vitesse  $u = c = 3,1$  m/s.

## 2.2. Question 2

Lorsque l'on passe de  $h = h_0$  à  $h = h_1 = h_0 + \Delta h$ , le débit passe de  $Q_0$  à  $Q_1$ . Ce débit  $Q_1$  est inconnu. L'onde de choc se propage à une vitesse  $c_s$  également inconnue. Ces deux inconnues peuvent être déterminées à l'aide des relations de Rankine-Hugoniot, ou relations de saut, que l'on écrit pour les équations de continuité et de quantité de mouvement. Celle-ci s'écrivent, pour un canal rectangulaire :

$$\left. \begin{aligned} Q_1 - Q_0 &= (h_1 - h_0)bc_s \\ \frac{Q_1^2}{bh_1} + \frac{bg}{2}h_1^2 - \frac{Q_0^2}{bh_0} - \frac{bg}{2}h_0^2 &= (Q_1 - Q_0)c_s \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

On peut facilement éliminer la célérité  $c_s$  entre les deux équations :

$$\frac{Q_1^2}{bh_1} + \frac{bg}{2}h_1^2 - \frac{Q_0^2}{bh_0} - \frac{bg}{2}h_0^2 = \frac{(Q_1 - Q_0)^2}{b\Delta h} \quad [5]$$

On obtient une équation du second degré en  $Q_1$  :

$$\left. \begin{aligned} AQ_1^2 + BQ_1 + C &= 0 \\ A &= \frac{1}{h_1} - \frac{1}{\Delta h} \\ B &= \frac{2Q_0}{\Delta h} \\ C &= \left( \frac{1}{\Delta h} - \frac{1}{h_0} \right) Q_0^2 + \frac{b^2 g}{2} (h_1^2 - h_0^2) \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

La solution de cette équation est :

$$Q_1 = \frac{-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \quad [7]$$

On notera que  $A$  est négatif. Le produit  $AC$  étant négatif, les deux racines de [7] sont de signes opposés. On ne conserve que la racine positive, à savoir :

$$Q_1 = \frac{-B - (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \quad [8]$$

Avec les données du Tableau 2.1, on trouve :  $Q_1 = 85 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $c_s = 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On obtient la valeur suivante de  $\lambda_1^{(2)}$  derrière le choc :  $\lambda_1^{(2)} = 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .