

## Exercice 6.1 (2)

## Méthodes aux différences finies pour les lois scalaires

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 6.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences. On ne traite ici que de l'application à l'exercice 1.2.

**1. Rappel de l'énoncé**

Reprendre les exercices 1.1 à 1.5 et vérifier les conclusions de ces exercices par le biais d'une résolution numérique par une méthode aux différences finies de votre choix. On conseille :

- une méthode aux caractéristiques (premier ou deuxième ordre, au choix) ;
- un schéma décentré amont (version conservative) ;
- le schéma de Preissmann ;
- un schéma TVD.

**2. Réponse****2.1. Discrétisation**

On implante ici uniquement une version conservative du schéma décentré amont car elle dispense de calculer la célérité d'onde ainsi que le terme source associé à la discrétisation caractéristique. Pour l'implantation d'autres versions, se reporter à l'exercice 6.1(1). En utilisant ce schéma, on vérifiera expérimentalement la formule de la célérité en faisant se propager une intumescence dans un canal.

Le schéma décentré amont explicite conservatif avec pas d'espace variable appliqué à l'onde cinématique donne :

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} (Q_{i-1}^n - Q_i^n) \quad [1]$$

où  $Q$  se déduit de  $A$  par la formule de Strickler :

$$Q_i^n = K_{i-1/2} S_{0,i-1/2}^{1/2} (R_H^{2/3} A)_i^n \quad [2]$$

et où le pas d'espace  $\Delta x_{i-1/2}$  est donné par :

$$\Delta x_{i-1/2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \quad [3]$$

Le rayon hydraulique est relié à la hauteur d'eau  $h$  par la formule suivante :

$$R_H = \frac{(b_0 + h)h}{b_0 + 2h / \cos \theta} \quad [4]$$

où  $h$  est liée à  $A$  par la formule :

$$h = \left\{ -\frac{b_0}{2} + \left[ \left( \frac{b_0}{2} \right)^2 + 4A \right]^{1/2} \right\} \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \quad [5]$$

Remarque : pour obtenir [4], on a simplement résolu l'équation  $(b_0 + h \operatorname{tg} \theta)h = A$ , en ne retenant que la solution physiquement admissible, à savoir une hauteur  $h$  positive).

S'agissant d'un schéma décentré amont, la pente  $S_{0,i-1/2}$  utilisée pour le calcul du débit à l'amont du point  $i$  est prise comme la pente moyenne entre les points  $i-1$  et  $i$  :

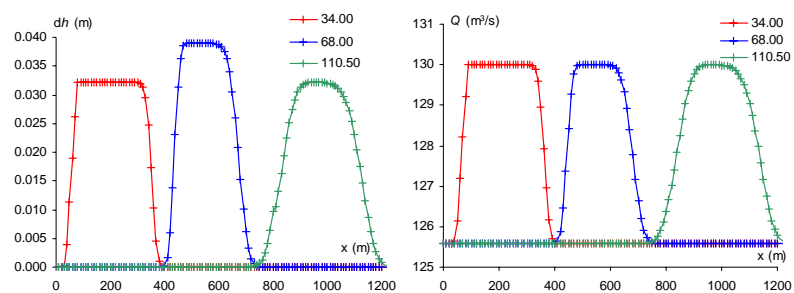
$$S_{0,i-1/2} = \frac{z_{b,i-1} - z_{b,i}}{\Delta x_{i-1/2}} \quad [6]$$

## 2.2. Application

On applique la discrétisation du paragraphe précédent au bief suivant (Cf. feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex612.xls>) :

- largeur au radier  $b_0 = 10$  m ;
- coefficient de Strickler  $K_{\text{Str}} = 40$  ;
- angle des berges avec la verticale  $q = 45^\circ$  ;
- pente du fond : 10% pour  $x < 400$  m et  $x > 800$  m, 5% pour  $400 \text{ m} < x < 800 \text{ m}$  ;
- débit initial  $Q_0 = 125,58 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

La célérité d'onde vaut  $17,49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans la partie du canal où la pente vaut 10 % et  $13,74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans la partie du canal où la pente est de 5 % (Cf. feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex612.xls>). On applique à la limite une perturbation du débit, que l'on fait progressivement passer de la valeur initiale à un palier de  $130 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Ce créneau de débit se propage vers l'aval. La Figure 1 donne les profils de la perturbation en hauteur (gauche) et du débit (droite) à différentes dates. La perturbation de débit est bien invariante, alors que la perturbation de hauteur vaut 3,215 cm dans la partie du canal où la pente est de 10 %, contre 3,89 cm dans la région où la pente est de 5 %. Après le passage par la section à faible pente, la valeur de la perturbation revient à 3,211 cm, ce qui est presque sa valeur initiale. La légère différence observée entre les valeurs initiale et finale est due à la diffusion numérique observée au niveau du passage à pente faible, dont on peut observer les effets au niveau des profils de débit et de hauteur (courbes vertes).



**Figure 1.** Profil de section en travers à deux dates différentes.