

## Exercice 5.1

## L'effet Doppler

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 5.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

**Erratum :** La formule [5.85] telle que donnée dans l'ouvrage est incorrecte, car il ne s'agit que d'une approximation (développement limite d'ordre 1) ! La bonne formule est donnée dans ce corrigé.

## 1. Rappel de l'énoncé

En utilisant la méthode des plans sécants dans l'espace des phases, montrer que lorsqu'une source sonore  $S$  émettant à une fréquence  $N$  se déplace dans l'air à une vitesse  $u$  inférieure à la vitesse  $c$  du son, un observateur immobile perçoit une fréquence  $N'$  donnée par :

$$N' = \frac{N}{1 - M \cos \theta} \quad [5.85]$$

où  $M$  est le nombre de Mach et  $\theta$  est l'angle formé par le vecteur vitesse de la source et le vecteur la reliant à l'observateur (Figure 5.12). Ce phénomène de variation de la fréquence perçue par l'observateur avec sa position par rapport à la source est connu sous le nom d'effet Doppler.

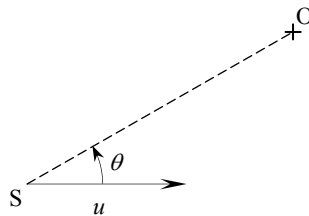


Figure 5.12. Source mobile émettant à une fréquence constante  $N$ .

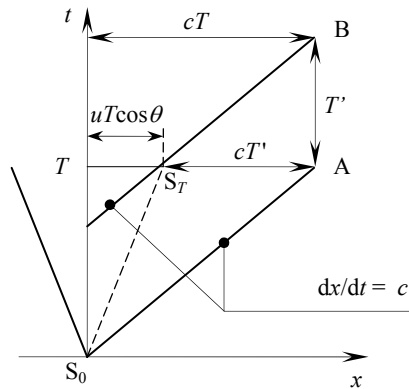
## 2. Réponses

On coupe l'espace des phases par le plan sécant reliant la source  $S$  à l'observateur  $O$ . Dans ce plan sécant, la vitesse de la source est  $u \cos \theta$ .

L'onde sonore émise par la source à la date  $t = 0$  part du point  $S_0$  d'abscisse  $x = 0$  (Figure 1). Elle se déplace à la vitesse du son  $c$ . Après une période sonore  $T = 1/N$ , cette onde se trouve au point A, d'abscisse  $cT$ .

A la date  $T$ , la source se trouve au point noté  $S_T$  sur la Figure 1. L'abscisse de ce point est  $x_T = u T \cos \theta$ . L'onde sonore émise par la source à cette date atteindra le point B, situé à la même abscisse que A, après une durée  $T'$ . Cette onde sonore se déplace également à la vitesse du son  $c$ .

Si l'on représente le mouvement de la source dans l'espace des phases limité à ce plan sécant, on obtient le graphique de la Figure 1 : la caractéristique  $dx/dt = u \cos \theta + c$  se déplace en direction de l'observateur et la caractéristique  $dx/dt = u \cos \theta - c$  se déplace dans la direction opposée.



**Figure 1.** Représentation des surfaces caractéristiques dans le plan sécant (SO).

On a donc :

$$x_B = x_T + cT' = uT \cos \theta + cT' \quad [1]$$

Comme par ailleurs

$$x_A = cT \quad [2]$$

Puisque  $x_A = x_B$ , on obtient :

$$uT \cos \theta + cT' = cT \quad [3]$$

soit encore, en divisant par  $c$  :

$$T' = (1 - M \cos \theta) T \quad [4]$$

La fréquence étant l'inverse de la période, on obtient :

$$N' = \frac{N}{1 - M \cos \theta} \quad [5]$$

c'est-à-dire l'équation [5.85]. Un développement limité à l'ordre 1 donne :

$$N' \approx (1 + M \cos \theta) N \quad [6]$$

Pour  $M < 1$ , lorsque la source sonore se dirige vers l'observateur,  $\cos\theta$  est positif : la fréquence  $N'$  est plus élevée que la fréquence  $N$  au repos : le son entendu par l'observateur est plus aigu que le son d'origine. Lorsque la source passe au droit de l'observateur,  $\cos\theta = 0$  et l'observateur entend exactement la fréquence au repos. Lorsque la source s'éloigne de l'observateur,  $\cos\theta$  est négatif et la fréquence est moins élevée que la fréquence au repos, le son est donc plus grave.

A noter que la fréquence maximale est entendue lorsque la source est encore loin de l'observateur (alors,  $\cos\theta = 1$ ) et que la fréquence minimale est entendue lorsque la source a dépassé l'observateur et s'en est éloignée suffisamment pour que  $\cos\theta$  soit assimilable à  $-1$ . On a :

$$\left. \begin{aligned} N'_{\max} &= \frac{N}{1-M} \approx (1+M)N \\ N'_{\min} &= \frac{N}{1+M} \approx (1-M)N \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

Le rapport des fréquences minimale et maximale est donné par :

$$\frac{N'_{\max}}{N'_{\min}} = \frac{1+M}{1-M} \quad [8]$$

A titre d'exemple, une ambulance se déplaçant à 50 km/h en ville ( $u = 13,9$  m/s) a un nombre de Mach de 0,04, ce qui d'après [8] donne un rapport de fréquence de 1,085. Sachant qu'une baisse d'un demi-ton chromatique est obtenue en divisant la fréquence par la racine douzième de 2, la fréquence de la sirène de l'ambulance baisse d'environ trois quarts de ton lorsqu'elle dépasse un observateur immobile. On vérifiera qu'une ambulance se déplaçant à 90 km/h donne une baisse d'un ton un quart. Une baisse de deux tons serait obtenue par une ambulance se déplaçant à 140 km/h.