

## Exercice 2.4

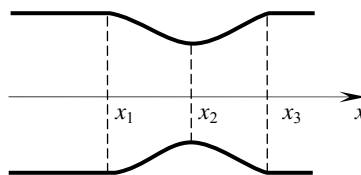
## Équations de Saint-Venant

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.4 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

**1. Rappel de l'énoncé**

On considère un chenal rectangulaire dont la section en travers se rétrécit entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , pour s'élargir entre  $x_2$  et  $x_3$  (Figure 2.24). En supposant le régime permanent atteint, la pente du fond nulle et les frottements négligeables, montrer que :

- si le régime est fluvial ( $u < c$ ) à l'amont du rétrécissement et torrentiel ( $u > c$ ) à l'aval, le régime critique ( $u = c$ ) est nécessairement atteint en  $x = x_2$ , c'est-à-dire au col de la section ;
- si le régime est fluvial des deux côtés du rétrécissement, la hauteur d'eau est minimale en  $x = x_2$  ;
- au contraire, si le régime est torrentiel des deux côtés du rétrécissement, la hauteur d'eau est maximale en  $x = x_2$ .



**Figure 2.24.** Écoulement à surface libre dans une section rétrécie.

**2. Réponse**

On reprend les équations sous forme conservative [2.117]. On développe la forme vectorielle pour plus de clarté et on introduit les hypothèses de pente nulle et de frottement négligeable :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{P}{\rho} \right) &= I_p \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

L'hypothèse de régime permanent donne :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + \frac{P}{\rho} \right) &= I_p \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

De plus, sous l'hypothèse d'un chenal rectangulaire, on a :

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= b \frac{gh^2}{2} \\ I_p &= \frac{gh^2}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{Q^2}{A} &= \frac{Q^2}{bh} \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

où  $b$  est la largeur du canal. En substituant la première équation [2] dans la seconde et en substituant les expressions [3], on obtient :

$$-\frac{Q^2}{bh^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Q^2}{b^2 h} \frac{\partial b}{\partial x} + bgh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gh^2}{2} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{gh^2}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \quad [4]$$

En simplifiant et en divisant [4] par  $b$ , on obtient :

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{u^2 h}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \quad [5]$$

Au col,  $\partial b / \partial x = 0$ . Par conséquent, soit  $u = c$  (transition fluvial-torrentiel), soit on a un extremum en  $h$ . Dans ce dernier cas :

- si l'on est en régime fluvial :  $u < c$ . Alors  $\partial h / \partial x$  est du même signe que  $\partial b / \partial x$  : la profondeur est minimale au col ;
- si l'on est en régime torrentiel :  $u > c$ . Alors  $\partial h / \partial x$  est du signe opposé à  $\partial b / \partial x$  : la profondeur est maximale au col.