

Exercice 1.1

Équation de Burgers

Ce document donne un corrigé rapide de l'exercice 1.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On cherche à résoudre l'équation de Burgers pour le profil initial suivant de vitesse et de masse volumique :

- la vitesse est constante, égale à u_1 , à gauche du point d'abscisse x_1 ; elle est constante, égale à u_2 , à droite du point d'abscisse $x_2 > x_1$; entre ces deux points, elle croît linéairement de u_1 à u_2 ;
- la masse volumique est constante, égale à ρ_0 sur tout le domaine.

1) Donner l'expression de $u(x)$ et $\rho(x)$ à $t > 0$.

2) Représenter l'évolution de la solution dans l'espace physique et dans l'espace des phases.

2. Pistes**2.1. Question 1****2.1.1. Profil de vitesse**

En s'inspirant du raisonnement exposé au 1.4.3, on établit une équation sur l'évolution de la dérivée $\partial u / \partial x$ le long des caractéristiques issues de x compris entre x_1 et x_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t) = \frac{u_0'}{1 + u_0' t} \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = u \quad [1]$$

où la quantité $u_0' = (u_2 - u_1)/(x_2 - x_1)$ représente la dérivée de u entre x_1 et x_2 à $t = 0$. Pour une date t donnée, la valeur de $\partial u / \partial x$ ne dépend pas de x , le profil est donc bien une droite.

2.1.2 Profil de masse volumique

L'évolution du profil de masse volumique se déduit de l'équation de continuité [1.62]. En développant la dérivée partielle $\partial(\rho u)/\partial x$ dans [1.62], on établit une équation caractéristique sur la masse volumique ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rho \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = u \quad [2]$$

– Sur les caractéristiques issues de $x < x_1$ ou $x > x_2$, $\partial u / \partial x = 0$. Par conséquent la valeur de ρ reste constante, égale à la valeur initiale.

– Sur les caractéristiques issues de $x_1 \leq x \leq x_2$, la valeur de $\partial u / \partial x$ obéit à l'équation [1]. En substituant [1] dans [2], on obtient :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{u_0'}{1 + u_0'} \rho \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = u \quad [3]$$

Cette équation s'intègre de la façon suivante :

$$\rho = \frac{1}{1 + u_0'} \rho_0 \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = u \quad [4]$$

Dans la région englobée par les caractéristiques issues des points x_1 et x_2 , la masse volumique est constante et diminue avec le temps. L'interprétation physique de ce fait est simple : la masse volumique se déplaçant à la vitesse u comme la vitesse, la masse totale comprise entre la caractéristique issue de x_1 et la caractéristique issue de x_2 est constante dans le temps. Comme la caractéristique issue de x_2 se déplace plus vite que celle issue de x_1 , la distance entre les deux caractéristiques augmente avec le temps, donc la masse volumique diminue.

2.2. Question 2

La figure ci-dessous présente l'allure de la solution dans l'espace physique et l'espace des phases.

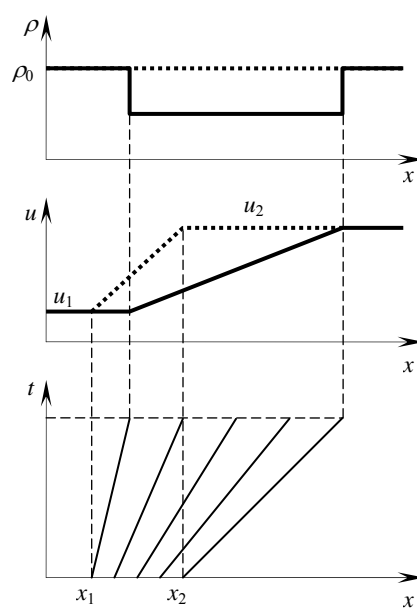


Figure 1. Allure de la solution dans l'espace physique (haut) et dans l'espace des phases (bas).