

Exercice 6.1 (1)

Méthodes aux différences finies pour les lois scalaires

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 6.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences. On ne traite ici que de l'application à l'exercice 1.1.

1. Rappel de l'énoncé

Reprendre les exercices 1.1 à 1.5 et vérifier les conclusions de ces exercices par le biais d'une résolution numérique par une méthode aux différences finies de votre choix. On conseille :

- une méthode aux caractéristiques (premier ou deuxième ordre, au choix) ;
- un schéma décentré amont (version conservative) ;
- le schéma de Preissmann ;
- un schéma TVD.

2. Réponses**2.1. Méthodes aux caractéristiques****2.1.1. Calcul de la vitesse**

On rappelle la forme caractéristique [1.67] de l'équation de Burgers :

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = u$$

L'intégration le long de cette caractéristique donne :

$$u_i^{n+1} = u_A \quad [1]$$

où A est le pied de la caractéristique passant par le point (x_i, t^n) dans l'espace des phases (Figure 1). La valeur u_A est interpolée à partir des valeurs aux points $i-1$, i et $i+1$. On rappelle que l'interpolation d'ordre 1 donne (en se plaçant dans l'hypothèse d'une vitesse positive) :

$$u_i^{n+1} = \text{Cr } u_{i-1}^n + (1 - \text{Cr})u_i^n \quad [2]$$

et que l'interpolation du second ordre donne :

$$u_i^{n+1} = \frac{\text{Cr}}{2} (\text{Cr} + 1)u_{i-1}^n + (1 - \text{Cr}^2)u_i^n + \frac{\text{Cr}}{2} (\text{Cr} - 1)u_{i+1}^n \quad [3]$$

avec la définition suivante du nombre de Courant Cr :

$$\text{Cr} = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^{n+1/2} \quad [4]$$

où $u_i^{n+1/2}$ désigne la valeur moyenne de u le long de la caractéristique.

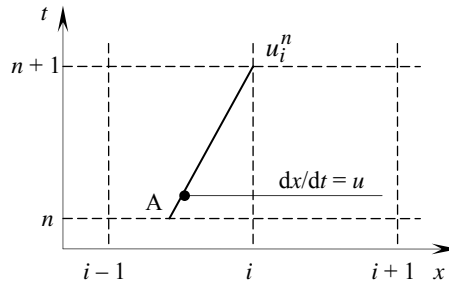


Figure 1. Principe de la méthode des caractéristiques.

On propose la formule générale suivante pour $u_i^{n+1/2}$:

$$u_i^{n+1/2} = (1 - \theta)u_{i-1}^n + \theta u_i^n \quad [5]$$

où θ (compris entre 0 et 1) est un coefficient de centrage. Pour $\theta = 0$, la célérité de la caractéristique est prise égale à celle du point amont au pas de temps précédent ; pour $\theta = 1$, on adopte la célérité du point courant au pas de temps précédent.

2.1.2. Calcul de la masse volumique

L'équation sur la masse volumique s'intègre en utilisant également la méthode des caractéristiques. On se souvient que la forme caractéristique de l'équation de continuité est :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial x} \rho \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = u \quad [6]$$

Une intégration explicite donne :

$$\rho_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t\right) \rho_A \quad [7]$$

On estime la dérivée de u par rapport à x en utilisant une méthode explicite décentrée amont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad [8]$$

et la valeur de ρ en A est estimée de la même manière que celle de u .
L'interpolation du premier ordre donne :

$$\rho_A = \text{Cr} \rho_{i-1}^n + (1 - \text{Cr}) \rho_i^n \quad [9]$$

et que l'interpolation du second ordre donne :

$$\rho_A = \frac{\text{Cr}}{2} (\text{Cr} + 1) \rho_{i-1}^n + (1 - \text{Cr}^2) \rho_i^n + \frac{\text{Cr}}{2} (\text{Cr} - 1) \rho_{i+1}^n \quad [10]$$

2.1.3. Cas-test

La Figure 2 illustre le comportement des solutions analytique et numérique aux dates $t = 5$ s et $t = 10$ s. On a choisi comme condition initiale un triangle de vitesse croissant de 1 m/s à 2 m/s en l'espace de 10 m, puis décroissant à nouveau jusqu'à 1 m/s en l'espace de 10 m. La masse volumique initiale est uniforme.

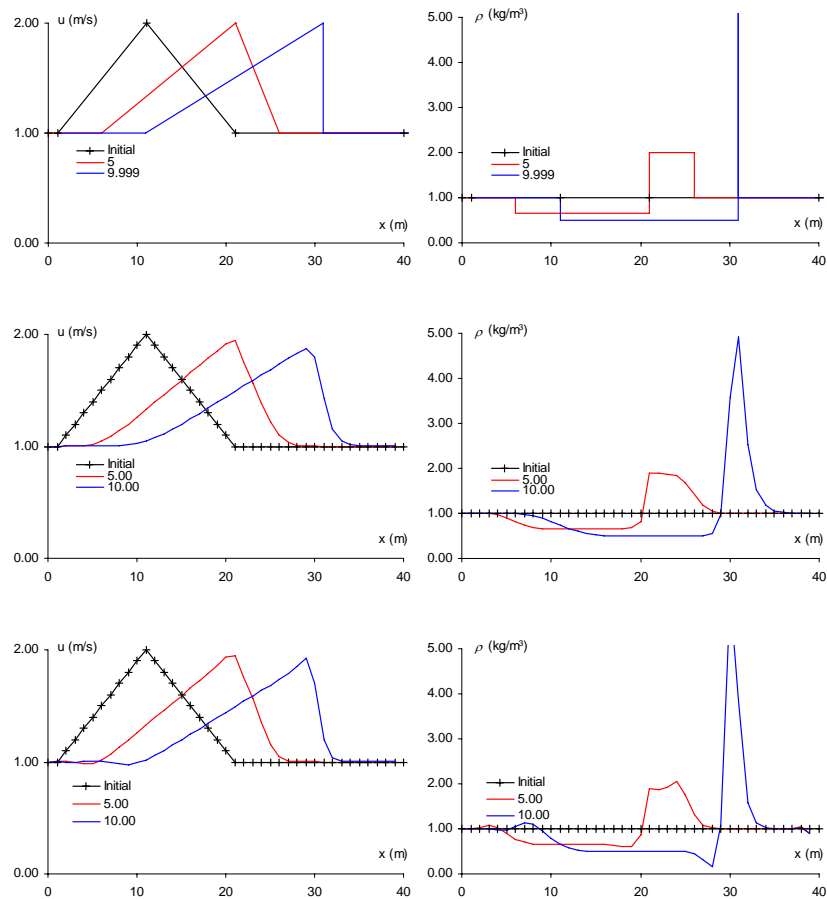


Figure 2. Propagation d'une perturbation de vitesse.. Profils de vitesse (gauche) et de masse volumique (droite) pour les paramètres du test. Solution analytique (haut), méthode des caractéristiques du premier ordre (milieu) et du second ordre (bas).

A noter que la date $t = 10$ s correspond à l'apparition du choc (voir l'exercice 3.2). Les pas d'espace et de temps adoptés pour la résolution numérique sont $\Delta x = 1$ m et $\Delta t = 0,5$ s, le paramètre de centrage est $\theta = 1/2$.

Quelques remarques sur la solution :

- avec un pas de temps $\Delta t = 0,5$ s, le nombre de Courant maximal, atteint pour $u = 2$ m/s, devrait être égal à 1. Ceci correspond à la limite de stabilité de la méthode des caractéristiques, ainsi qu'à la valeur pour laquelle on obtient la solution analytique. Cependant, le nombre de Courant n'est jamais strictement égal à 1 dans cette application, car on a utilisé un paramètre de centrage $\theta = 1/2$. Par conséquent, d'après [5], à moins que deux points de calcul consécutifs ne prennent la valeur $u = 2$ m/s, la vitesse interpolée ne peut prendre cette valeur. Pour préserver la valeur maximale du profil, il faudrait utiliser un coefficient de centrage égal à 0. Dans ce cas, la valeur $u = 2$ m/s se propagerait bien avec un nombre de Courant de 1 et le maximum ne serait pas lissé (on laisse au lecteur le soin de s'en assurer en manipulant la feuille de calcul disponible à l'adresse : <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex611.xls>);
- les effets de la diffusion numérique sur la solution obtenue par la méthode des caractéristiques du premier ordre sont visibles : les fronts de vitesse et de masse volumique sont lissés. A noter que la diffusion numérique est maximale pour $u = 1$ m/s, puisque pour cette valeur de u , le nombre de Courant est égal à $1/2$ (Cf. l'annexe B pour le portrait d'amplitude du schéma aux caractéristiques du premier ordre) ;
- on observe des effets de dispersion numérique sur la solution obtenue par la méthode des caractéristiques du deuxième ordre : des oscillations apparaissent sur les profils de vitesse et de masse volumique, en particulier à l'arrière des profils ;
- au-delà de $t = 10$ s, la méthode des caractéristiques risque de donner des solutions faussées en termes de conservation car à $t = 10$ s la solution devient discontinue (Cf. chapitre 6).

2.2. Schéma décentré amont (forme conservative)

2.2.1. Option 1 : calcul découplé de la vitesse et de la masse volumique

Une première option consiste à résoudre séparément la forme conservative sur la vitesse (équation [1.69]) et la masse volumique (équation [1.62]). La discrétisation conservative décentrée amont conservative de [1.69] et [1.62] est :

$$\left. \begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(u_{i-1}^n)^2 - (u_i^n)^2}{2} \\ \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u\rho)_{i-1}^n - (u\rho)_i^n \right] \end{aligned} \right\} \quad [11]$$

2.2.2. Option 2 : calcul couplé de la masse volumique et de la vitesse

On a vu au chapitre 3 que l'équation [1.69] n'est plus strictement équivalente à l'équation [1.63] dans le cas de solutions discontinues (puisque ces deux équations font l'hypothèse de quantités conservées différentes). Dans cette deuxième option, on considère les quantités conservées ρ et ρu . On obtient les deux discrétisations décentrées amont explicites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u\rho)_{i-1}^n - (u\rho)_i^n \right] \\ (\rho u)_i^{n+1} &= (\rho u)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho u^2)_{i-1}^n - (\rho u^2)_i^n \right] \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

C'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u\rho)_{i-1}^n - (u\rho)_i^n \right] \\ u_i^{n+1} &= \frac{(\rho u)_i^n}{\rho_i^{n+1}} + \frac{1}{\rho_i^{n+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho u^2)_{i-1}^n - (\rho u^2)_i^n \right] \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

On calcule donc dans un premier temps ρ_i^{n+1} et l'on utilise cette solution pour calculer u_i^{n+1} .

2.2.3. Application

L'application est identique à celle du 2.1.3. On a adopté les mêmes valeurs de Δt et de Δx .

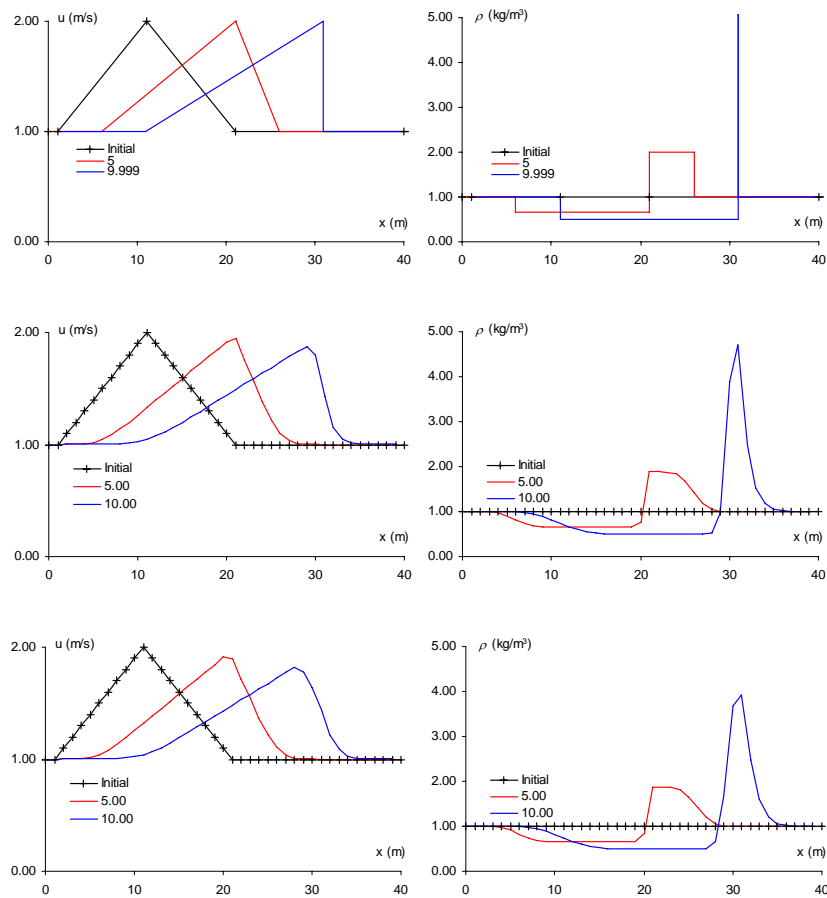


Figure 3. Propagation d'une perturbation de vitesse.. Profils de vitesse (gauche) et de masse volumique (droite) pour les paramètres du test. Solution analytique (haut), schéma décentré amont explicite n°1 (milieu), schéma décentré amont explicite n°2 (bas).

On remarque notamment que le schéma n°2, s'il respecte rigoureusement les équations conservatives originales [1.62] et [1.63], est plus diffusif que le schéma n°1. Ceci peut paraître logique, puisque le calcul de u , effectué selon une discrétisation diffusive, utilise le résultat du calcul de ρ , également diffusif.

2.3. Schéma de Preissmann

2.3.1. Calcul de la vitesse

On choisit ici de résoudre la forme non conservative [1.66], car elle donne lieu à beaucoup moins de difficultés que la forme conservative [1.69] ou [1.63] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad [1.66]$$

Les termes de cette équation sont discrétisés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx (1 - \psi) \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ u &\approx (1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx (1 - \theta) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

On a choisi de ne pas faire intervenir les valeurs de u au pas de temps $n + 1$ dans l'estimation de u afin de ne pas faire apparaître de termes du second degré en u_i^{n+1} dans l'équation discrétisée. En substituant [14] dans [1.66], on obtient :

$$\begin{aligned} &(1 - \psi) \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ &+ \left[(1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \left((1 - \theta) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) = 0 \end{aligned} \quad [15]$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\left\{ -\frac{1 - \psi}{\Delta t} - \left[(1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{1 - \theta}{\Delta x} \right\} u_{i-1}^{n+1} \\ &+ \left\{ -\frac{\psi}{\Delta t} + \left[(1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{1 - \theta}{\Delta x} \right\} u_i^n \\ &+ \left\{ \frac{1 - \psi}{\Delta t} - \left[(1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{\theta}{\Delta x} \right\} u_{i-1}^{n+1} \\ &+ \left\{ \frac{\psi}{\Delta t} + \left[(1 - \alpha) u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{\theta}{\Delta x} \right\} u_i^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad [16]$$

Ce qui donne la solution suivante :

$$u_i^{n+1} = -\frac{a}{d} u_{i-1}^n - \frac{b}{d} u_i^n - \frac{c}{d} u_{i-1}^{n+1} \quad [17]$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{1-\psi}{\Delta t} - \left[(1-\alpha)u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{1-\theta}{\Delta x} \\ b &= -\frac{\psi}{\Delta t} + \left[(1-\alpha)u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{1-\theta}{\Delta x} \\ c &= \frac{1-\psi}{\Delta t} - \left[(1-\alpha)u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{\theta}{\Delta x} \\ d &= \frac{\psi}{\Delta t} + \left[(1-\alpha)u_{i-1}^n + \alpha u_i^n \right] \frac{\theta}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad [18]$$

2.3.2. Calcul de la masse volumique

On résout la forme conservative [1.62] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &\approx (1-\psi) \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &\approx (1-\theta) \frac{(\rho u)_i^n - (\rho u)_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta \frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad [19]$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} &(1-\psi) \frac{\rho_{i-1}^{n+1} - \rho_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} \\ &+ (1-\theta) \frac{(\rho u)_i^n - (\rho u)_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta \frac{(\rho u)_i^{n+1} - (\rho u)_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad [20]$$

D'où, en regroupant les termes :

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1-\psi}{\Delta t} - \frac{1-\theta}{\Delta x} u_{i-1}^n \right) \rho_{i-1}^n \\ &+ \left(-\frac{\psi}{\Delta t} + \frac{1-\theta}{\Delta x} u_i^n \right) \rho_i^n \\ &+ \left(\frac{1-\psi}{\Delta t} - \frac{\theta}{\Delta x} u_{i-1}^{n+1} \right) \rho_{i-1}^{n+1} \\ &+ \left(\frac{\psi}{\Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x} u_i^{n+1} \right) \rho_i^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad [21]$$

On en tire l'expression de ρ_i^{n+1} :

$$\rho_i^{n+1} = -\frac{a'}{d'} \rho_{i-1}^n - \frac{b'}{d'} \rho_i^n - \frac{c'}{d'} \rho_{i-1}^{n+1} \quad [22]$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\frac{1-\psi}{\Delta t} - \frac{1-\theta}{\Delta x} u_{i-1}^n \\ b' &= -\frac{\psi}{\Delta t} + \frac{1-\theta}{\Delta x} u_i^n \\ c' &= \frac{1-\psi}{\Delta t} - \frac{\theta}{\Delta x} u_{i-1}^{n+1} \\ d' &= \frac{\psi}{\Delta t} + \frac{\theta}{\Delta x} u_i^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad [23]$$

2.3.3. Application

On reprend le même cas-test que précédemment, avec les mêmes pas de temps et d'espace. Le coefficient α de centrage de la vitesse dans [14] a été pris égal à $\frac{1}{2}$.

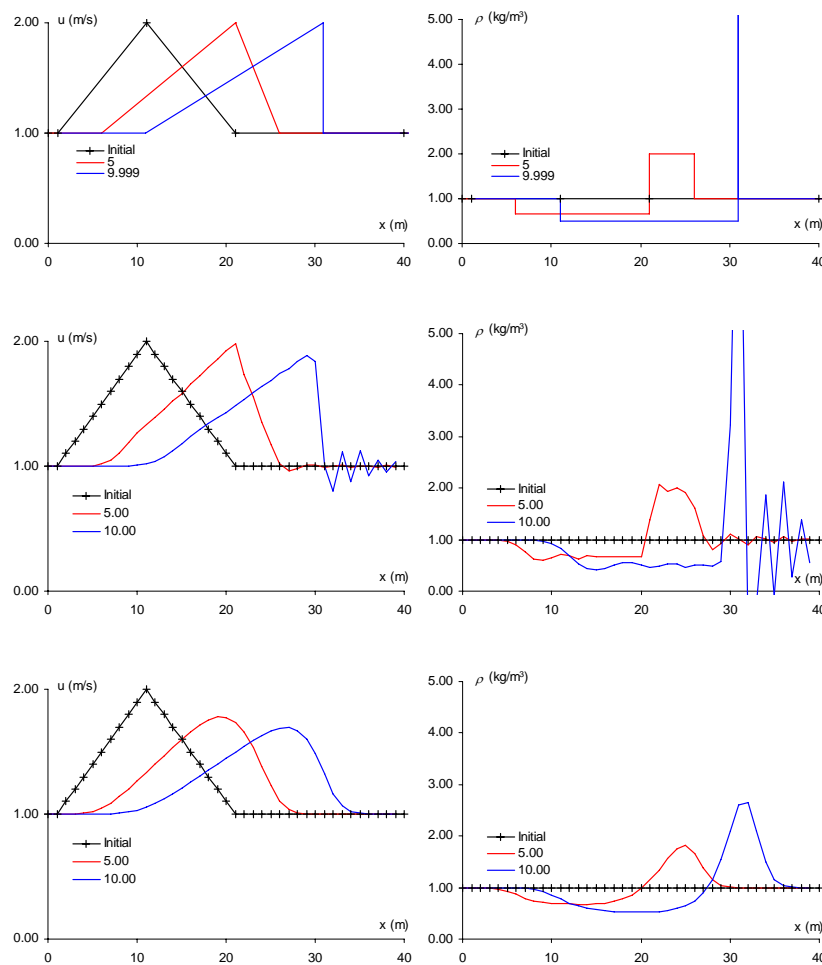


Figure 4. Propagation d'une perturbation de vitesse.. Profils de vitesse (gauche) et de masse volumique (droite) pour les paramètres du test. Solution analytique (haut), schéma de Preissmann avec $\theta = \frac{1}{2}$ (milieu) et $\theta = 1$ (bas).

On fera les remarques suivantes :

- adopter un coefficient d'implication $\theta = \frac{1}{2}$ et un coefficient $\psi = \frac{1}{2}$ élimine la diffusion numérique. Le schéma devient alors dispersif. C'est pourquoi, sur la Figure 4 (milieu), on observe des oscillations sur la vitesse et la masse volumique ;

– ces oscillations peuvent être réduites, voire éliminées complètement, en augmentant le paramètre d'implication θ . Pour $\theta = 1$ (Figure 4, bas) les oscillations disparaissent complètement. Cette configuration représente cependant un lissage extrême ; on obtient d'assez bons résultats en adoptant une valeur de $\theta = 0,65$.

2.4. Schéma TVD

2.4.1. Calcul de la vitesse

On discrétise la forme non conservative [1.66] de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad [1.66]$$

Cette équation se discrétise de la façon suivante (Cf. 6.6.2, équation [6.86]) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - (u_i^n - u_{i-1}^n)Cr + \frac{Cr^2 - Cr}{2} \left[(u_{i+1}^n - u_i^n)\phi_{i+1/2} - (u_i^n - u_{i-1}^n)\phi_{i-1/2} \right] \quad [24]$$

où f est une fonction limiteur choisie selon les critères exposés au 6.6.3 et 6.6.4. On choisit d'utiliser, pour calculer le nombre de Courant, d'estimer la vitesse $u_{i-1/2}$ selon une approximation qui satisfasse la conservation de la quantité de mouvement (Cf. chapitre 6, section 6.8) :

$$u_{i+1/2}^{QDM} = \frac{1}{2} \frac{(u^2)_{i+1}^n - (u^2)_i^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} = \frac{u_{i+1}^n + u_i^n}{2} \quad [25]$$

2.4.2. Calcul de la masse volumique

On applique un schéma TVD à la forme non conservative de [1.62] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad [26]$$

ce qui donne :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)Cr + \frac{Cr^2 - Cr}{2} \left[(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)\phi_{i+1/2} - (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)\phi_{i-1/2} \right] - \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \rho_{i-1}^n \quad [27]$$

où l'on estime la dérivée de u par rapport à x en utilisant une méthode explicite décentrée amont :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad [28]$$

2.4.3. Application

La Figure 5 montre les résultats obtenus avec le limiteur MC.

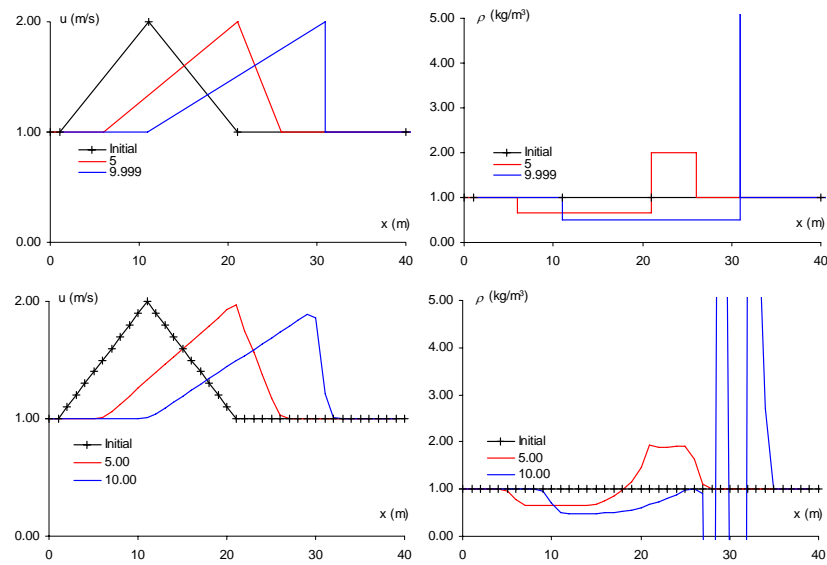


Figure 5. Propagation d'une perturbation de vitesse.. Profils de vitesse (gauche) et de masse volumique (droite) pour les paramètres du test. Solution analytique (haut), schéma TVD avec limiteur MC (bas).