

Exercice 3.1

Onde cinématique

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 3.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère le canal rectangulaire de l'exercice 2.5 (Cf. 3.7.2.5), dans lequel l'écoulement obéit à la loi de Strickler [1.81]. Le régime permanent est supposé atteint.

1) La profondeur d'eau initiale h_0 est uniforme, égale à 1 m. Calculer le débit initial dans le canal en faisant l'hypothèse d'écoulement permanent uniforme $S_f = S_0$ et en utilisant l'approximation du canal large ($R_H \approx h$). En déduire la célérité d'onde dans le cas de l'approximation de l'onde cinématique.

2) Une perturbation $\Delta h = 50$ cm sur la hauteur d'eau apparaît en tête du canal. Montrer qu'une onde de choc apparaît et déterminer sa vitesse de propagation vers l'aval pour les données du Tableau 2.1.

Symbole	Signification	Valeur
b	Largeur du canal	10 m
g	Accélération de la pesanteur	$9,81 \text{ m.s}^{-1}$
K_{Str}	Coefficient de Strickler	40
S_0	Pente du fond du canal	0,1 %, 1 % et 5 %

Tableau 2.1. Paramètres pour le problème 2.5.

2. Réponses

2.1. Question 1

Le débit et la célérité de l'onde cinématique sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} Q &= K_{\text{Str}} S_0^{1/2} b h^{5/3} \\ \lambda &= \frac{5}{3} K_{\text{Str}} S_0^{1/2} h^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Soit, avec les données du Tableau 2.5 :

- pour $S_0 = 10^{-3}$: $Q = 12,7 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\lambda = 2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 10^{-2}$: $Q = 40 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\lambda = 6,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 5 \cdot 10^{-2}$: $Q = 89,4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\lambda = 14,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

2.2. Question 2

Pour un canal rectangulaire, la célérité de l'onde cinématique est une fonction croissante de la profondeur (Cf. deuxième équation [1]). En augmentant la profondeur à l'amont, on augmente donc la célérité d'onde. Avec les données du Tableau 2.5, les célérités d'onde pour une hauteur $h = 1,5 \text{ m}$ sont les suivantes :

- pour $S_0 = 10^{-3}$: $\lambda = 2,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 10^{-2}$: $\lambda = 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 5 \cdot 10^{-2}$: $\lambda = 19,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

Dans chaque cas, la célérité à gauche est supérieure à la célérité à droite. Il se forme donc une onde de choc, représentée sur la Figure 1.

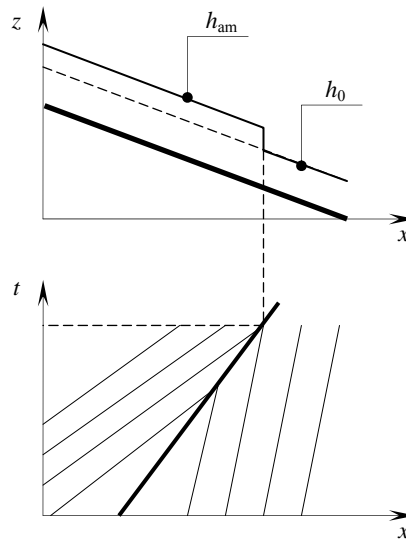


Figure 1. Onde cinématique. Représentation de l'onde de choc résultant d'une augmentation de la hauteur amont dans l'espace physique (haut) et dans l'espace des phases (bas)

La vitesse à laquelle cette onde de choc se déplace est donnée par :

$$c_s = \frac{Q_{\text{am}} - Q_0}{A_{\text{am}} - A_0} = K_{Str} S_0^{1/2} \frac{h_{\text{am}}^{5/3} - h_0^{5/3}}{h_{\text{am}} - h_0} \quad [2]$$

où A est la section en travers, et les indices 0 et am désignent respectivement les valeurs initiales et amont après l'augmentation de hauteur. On obtient, avec les valeurs données dans le Tableau 2.5 :

- pour $S_0 = 10^{-3}$: $c_s = 2,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 10^{-2}$: $c_s = 7,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- pour $S_0 = 5 \cdot 10^{-2}$: $c_s = 17,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

On vérifie bien la théorie, à savoir que la vitesse de déplacement de l'onde de choc est comprise entre la célérité à droite et la célérité à gauche.