

## Exercice 6.1 (3)

## Méthodes aux différences finies pour les lois scalaires

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 6.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences. On ne traite ici que de l'application à l'exercice 1.4.

**1. Rappel de l'énoncé**

Reprendre les exercices 1.1 à 1.5 et vérifier les conclusions de ces exercices par le biais d'une résolution numérique par une méthode aux différences finies de votre choix. On conseille :

- une méthode aux caractéristiques (premier ou deuxième ordre, au choix) ;
- un schéma décentré amont (version conservative) ;
- le schéma de Preissmann ;
- un schéma TVD.

**2. Réponse****2.1. Discrétisation**

On implante ici uniquement une version conservative du schéma décentré amont car elle dispense de calculer la célérité d'onde ainsi que le terme source associé à la discrétisation caractéristique. De plus, la formulation conservative permet de s'affranchir des problèmes liés à la non-unicité des solutions faibles, (Cf. le chapitre 3 pour une discussion détaillée).

Le schéma décentré amont explicite conservatif avec pas d'espace variable appliqué à l'équation de Buckley-Leverett conduit à la relation suivante :

$$s_i^{n+1} = s_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} (F_{i-1/2}^{n+1/2} - F_{i+1/2}^{n+1/2}) \quad [1]$$

où  $F$  est donné par [1.111] :

$$F_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{(s_{i-1/2}^{n+1/2})^2}{(s_{i-1/2}^{n+1/2})^2 + (1 - s_{i-1/2}^{n+1/2})^2 b_{BL}} V_d \quad [2]$$

et où le pas d'espace  $\Delta x_{i-1/2}$  est donné par :

$$\Delta x_{i-1/2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \quad [3]$$

Pour un schéma décentré amont explicite, l'expression de  $s_{i-1/2}^{n+1/2}$  est :

$$s_{i-1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} s_i^n & \text{si } V_d < 0 \\ s_{i-1}^n & \text{si } V_d \geq 0 \end{cases} \quad [4]$$

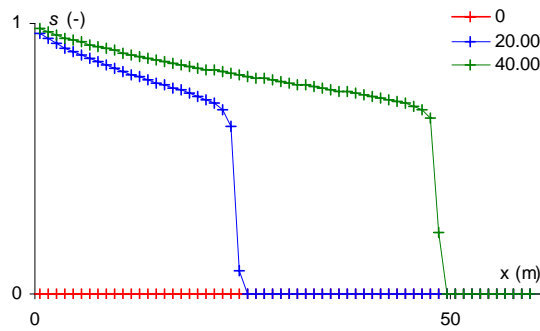
On rappelle que le schéma décentré amont explicite est sujet à une contrainte de stabilité (le nombre de Courant ne devant pas dépasser l'unité en valeur absolue pour la stabilité). Le lecteur est invité à exprimer cette contrainte de stabilité

## 2.2. Application

On applique la discrétisation du paragraphe précédent pour le jeu de paramètres suivant (Cf. feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex614.xls>) :

- vitesse de Darcy  $V_d = 1 \text{ m/j}$  ;
- paramètre de forme  $b_{BL} = 1$  ;
- pas d'espace  $\Delta x = 1 \text{ m}$  ;
- pas de temps  $\Delta t = 0,5 \text{ j.}$

Pour la clarté de l'implantation, seul le cas d'une vitesse de Darcy positive est pris en compte dans la discrétisation. La saturation est donc imposée à la limite gauche.



**Figure 1.** Profil de saturation à deux dates différentes.