

Exercice 4.2

Équations d'Euler

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 4.2 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

Résoudre le problème de Riemann pour les équations d'Euler, pour les données initiales :

$$\left. \begin{array}{l} p_L = p_R \\ \rho_L = \rho_R \\ u_L = -u_R \end{array} \right\} \quad [4.64]$$

Montrer également qu'une zone de vide peut apparaître si u_L est inférieure à une certaine valeur seuil, que l'on déterminera. Indiquer comment la solution du problème de Riemann peut être utilisée dans des problèmes aux limites tels que la modélisation d'un écoulement arrivant sur une paroi imperméable.

2. Réponses

La solution du problème de Riemann pour les équations d'Euler consiste en une zone où la pression et la vitesse sont constantes, séparée de l'état gauche et droit par deux ondes de raréfaction ou de choc. Cette zone de vitesse et de pression constante contient de plus une discontinuité de contact par rapport à l'entropie, se déplaçant à la vitesse de l'écoulement.

2.1. Remarque préliminaire : symétrie

La symétrie permet d'établir les propriétés suivantes :

– le problème de Riemann reste identique si l'on change le sens de l'axe des x (en effet, dans ce cas on intervertit les états gauche et droit et l'on change le signe des vitesses). Par conséquent, la vitesse u^* dans la zone intermédiaire d'état constant vérifie $u^* = -u^*$, donc :

$$u^* = 0 \quad [1]$$

– l'onde à gauche et à droite sont de même nature et se propagent à des célérités opposées. Il suffit donc de déterminer par exemple l'onde gauche pour déterminer complètement la solution.

– il s'ensuit que la discontinuité de contact a une vitesse nulle. Les états gauche et droit étant identiques en termes de pression et de masse volumique, l'entropie est la même à gauche et à droite de la discontinuité de contact ; le saut d'entropie est donc nul au travers de la discontinuité.

2.2. Cas $u_L > 0$

Dans le cas où la vitesse u_L de l'état gauche est positive, les méthode heuristique et l'approximation par les invariants de Riemann donnent la même indication : la célérité $u^* - c^*$ dans l'état intermédiaire est supérieure à la célérité $u_L - c_L$ dans l'état gauche. L'onde qui se dirige vers la gauche devrait donc être une onde de choc. Dans ce cas, u^* et c^* sont reliés à u_L et c_L par les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\left. \begin{aligned} \rho_L u_L &= (\rho_L - \rho^*) c_s \\ \rho_L u_L^2 + (p_L - p^*) &= \rho_L u_L c_s \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

où c_s est la vitesse (négative) du choc. Dans ces deux égalités, on a tenu compte de [1].

En substituant la première équation [2] dans la deuxième pour éliminer la vitesse inconnue du choc et en multipliant par $\rho_L - \rho^*$, on obtient :

$$\rho_L u_L^2 (\rho_L - \rho^*) + (p_L - p^*) (\rho_L - \rho^*) = (\rho_L u_L)^2 \quad [3]$$

On définit la fonction $f(h)$ par :

$$f(\rho) = (\rho_L u_L^2 + p_L - p)(\rho_L - \rho) \quad [4]$$

Avec cette définition, ρ^* est la valeur de ρ pour laquelle f satisfait :

$$f(\rho^*) = (\rho_L u_L)^2 \quad [5]$$

On notera que, s étant une constante le long de la caractéristique $dx/dt = u + c$ (qui traverse l'onde de choc), la quantité p/ρ^g est constante au travers du choc :

$$p = p_L \left(\frac{\rho}{\rho_L} \right)^\gamma \quad [6]$$

D'où l'expression finale de f :

$$f(\rho) = \left[\rho_L u_L^2 + p_L - p_L \left(\frac{\rho}{\rho_L} \right)^\gamma \right] (\rho_L - \rho) \quad [7]$$

Une étude rapide de variations montre que :

- cette fonction s'annule pour $\rho = \rho_L$;
- elle s'annule également pour une pression p_1 (correspondant à une masse volumique r_1) telle que

$$p_1 = \rho_L u_L^2 + p_L \quad [8]$$

C'est-à-dire :

$$\rho_1^\gamma = \frac{\rho_L u_L^2}{p_L} + \rho_L^\gamma \quad [9]$$

Il est facile de vérifier que f est négative pour $\rho_L < \rho < \rho_1$ et positive pour $\rho > \rho_1$. La question des variations de f pour les valeurs inférieures à ρ_L n'a pas d'importance pour cette étude, puisque l'on sait d'après la première équation [2] que, c_s étant négative, la solution ρ^* est nécessairement supérieure à ρ_L . On conseille d'initialiser les itérations de la méthode de Newton à la valeur donnée par l'invariant de Riemann le long de la caractéristique $dx/dt = u + c$:

$$\beta_1 p^{*\beta_2} = u_L + \beta_1 p_L^{\beta_2} \quad [10]$$

où β_1 et β_2 sont donnés par [2.221]. On en tire la masse volumique ρ^* en inversant l'équation [6].

2.3. Cas $u_L < 0$

Dans ce cas, on obtient une onde de raréfaction. L'écoulement étant continu, les invariants de Riemann sont utilisables au travers de cette onde, et [10] s'applique rigoureusement.

On notera que dans ce cas, la pression p^* (donc la masse volumique ρ^*) devient nulle pour la valeur suivante de u_L :

$$u_L^{\text{vide}} = -\beta_1 p_L^{\beta_2} \quad [11]$$

Toute valeur de u_L inférieure à cette valeur limite entraîne la création d'une zone de vide. Cette zone progresse à la vitesse $u - c$, où $c = p = 0$ et u vérifie :

$$u = u_L + \beta_1 p_L^{\beta_2} \quad [12]$$

2.4. Exploitation des propriétés de symétrie

La remarque faite au 2.1 conduit à la conclusion suivante : n'importe quelle situation requérant une vitesse nulle en un point donné peut s'obtenir en définissant un problème de Riemann en ce point, où l'état gauche et l'état droit sont symétriques.