

Exercice 2.3

Coup de béliet

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.3 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère une conduite horizontale dont la section évolue de la manière suivante (Figure 2.23) :

- pour $x < x_1$, la section est constante, égale à A_1 ;
- pour $x > x_2$, la section est constante, égale à A_2 ;
- entre x_1 et x_2 , la section évolue continûment de A_1 à A_2 .

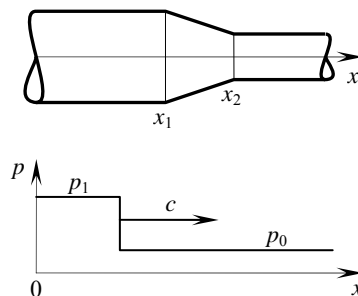


Figure 2.23. Onde de pression se propageant dans une conduite de section variable.

La célérité est uniforme sur toute la longueur de la conduite. L'eau est initialement en mouvement avec un débit Q_0 uniforme dans la conduite, à une pression initiale p_0 . A $t = 0$, la pression passe instantanément à la valeur p_1 à l'extrémité de la conduite, créant une onde de pression qui se propage à la célérité c vers la droite. Dans tout ce qui suit, on négligera les effets des frottements.

1) Donner l'expression du débit Q_1 derrière l'onde de pression avant que celle-ci ne parvienne en $x = x_1$.

2) Déterminer l'expression de la pression et du débit en $x = x_2$ lorsque l'onde de pression parvient en ce point. Une contraction de section provoque-t-elle une amplification ou un amortissement de la variation de pression ?

2. Réponses

2.1. Question 1

La réponse à cette question a été donnée dans les exercices 2.1 et 2.2 :

$$Q_1 - Q_0 = \frac{A_1}{\rho c_1} (p_1 - p_0) \quad [1]$$

2.2. Question 2

On suit l'évolution de la pression p et du débit Q le long de la caractéristique $dx/dt = c$ en se plaçant à une distance nulle du front de pression, à gauche. La pression et le débit en ce point sont notés p et Q . La pression et le débit immédiatement à droite sont donnés par l'état initial (p_0, Q_0) (Figure 1).

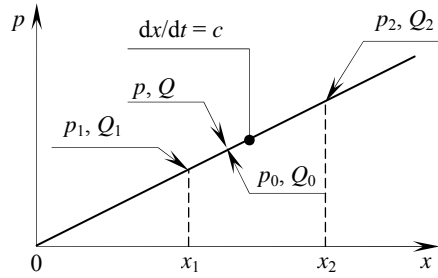


Figure 1. Utilisation des relations caractéristiques dans l'espace des phases.

La section A étant variable, on ne peut plus utiliser la formulation simplifiée [2.82]. Il faut utiliser la formulation générale [2.79] le long de la caractéristique de célérité c :

$$dp + \frac{\rho c}{A} dQ = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = c \quad [2]$$

D'autre part, le long de cette même caractéristique, on peut relier le débit Q au débit initial et à la pression initiale dans la conduite en intégrant la relation caractéristique $dx/dt = -c$ sur une distance nulle :

$$p = p_0 + \frac{\rho c}{A} (Q - Q_0) \quad [3]$$

où A est une fonction de x entre x_1 et x_2 . En différenciant [3], on obtient (N.B. : la section ne peut plus être considérée comme constante) :

$$dp = \frac{\rho c}{A} dQ - \frac{\rho c(Q - Q_0)}{A^2} dA \quad [4]$$

En substituant [4] dans [2], il vient :

$$2 \frac{\rho c}{A} dQ = \frac{\rho c(Q - Q_0)}{A^2} dA \quad [5]$$

Cette équation se simplifie en :

$$2 \frac{d(Q - Q_0)}{Q - Q_0} = \frac{dA}{A} \quad [6]$$

En intégrant cette relation entre x_1 et x_2 , on obtient :

$$\frac{Q_2 - Q_0}{Q_1 - Q_0} = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{1/2} \quad [7]$$

Soit encore :

$$Q_2 - Q_0 = \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^{1/2} (Q_1 - Q_0) \quad [8]$$

On remplaçant [8] dans [3], on obtient :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\rho c}{(A_1 A_2)^{1/2}} (Q_1 - Q_0) \\ &= p_0 + \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{1/2} (p_1 - p_0) \end{aligned} \quad [9]$$

Un rétrécissement de section a pour effet d'augmenter la pression (résultat assez intuitif) en même temps que de diminuer le débit. A noter que la manière dont la section varie entre x_1 et x_2 n'a pas d'importance.

On notera qu'une section nulle donne un débit de passage nul et une surpression infinie. Ce résultat sans sens physique pouvait être attendu, car il est impossible de faire circuler un débit initial Q_0 non nul dans une conduite de section nulle (cela est équivalent à supposer une vitesse initiale infinie).

N.B. Les lecteurs désireux de prolonger l'exercice peuvent à présent déterminer l'expression du débit Q_3 et de la pression p_3 lorsque l'onde qui s'est réfléchi en $x = x_2$ parvient en x_1 . Pourrait-on s'attendre à ce résultat ?