

Exercice 1.4

Équation de Buckley-Leverett

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 1.4 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère un aquifère de longueur L contaminé à 50% par des hydrocarbures, c'est-à-dire que la saturation initiale en eau, supposée uniforme, est égale à 0,5 (Figure 1.27). On désire décontaminer cet aquifère en injectant de l'eau pure à son extrémité gauche ($x = 0$), à une vitesse de Darcy que l'on notera V .

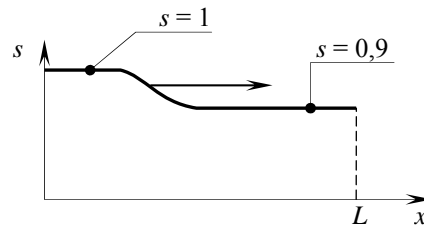


Figure 1.27. Décontamination d'un aquifère par injection d'eau pure.

1) Déterminer la forme et l'expression du profil de saturation en eau en fonction du temps (on conseille d'exprimer la position x de l'interface eau-hydrocarbure en fonction de s et non l'inverse).

2) Pour le jeu de données du Tableau 1.5, déterminer la durée nécessaire pour que la contamination moyenne de l'aquifère ne soit plus que de 5%, 1% et 0,5%.

Symbole	Signification	Valeur
b_{BL}	Paramètre de forme pour le flux de Buckley-Leverett	1
L	Longueur de l'aquifère	200 m
s_0	Saturation en eau initiale dans l'aquifère	0,5
s_i	Saturation en eau au point d'injection ($x = 0$)	1
V	Vitesse de Darcy	1 m.j^{-1}

Tableau 1.5. Paramètres pour le problème 1.4.

2. Solution

2.1. Question 1

A $t > 0$, la saturation en $x = 0$ passe brutalement de la valeur $s_0 = 0,9$ à $s_i = 1$. Le profil de saturation devient donc discontinu à la limite gauche du domaine. On peut cependant l'approcher par un profil continu où la saturation décroît de s_i à s_0 sur une distance ε infiniment petite (Figure 1). Ce profil restant continu, les dérivées de s restent définies et les célérités d'onde également. On peut donc lui appliquer les formes non conservative et caractéristique de l'équation de Buckley-Leverett.

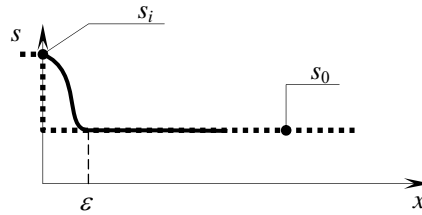


Figure 1. Approximation d'un profil discontinu (trait pointillé) par un profil continu (trait gras).

Le profil à t immédiatement supérieur à 0 peut donc être décrit de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{ll} x(t=0) = 0 & \text{pour } s = s_i \\ x(t=0) \in]0, \varepsilon[& \text{pour } s_0 < s < s_i \\ s(t=0) = s_0 & \text{pour } x > \varepsilon \end{array} \right\} \quad [1]$$

où ε peut être rendu aussi petit que voulu. On a choisi d'exprimer x en fonction de s plutôt que l'inverse dans les deux premières équations car cette description rend la solution plus facile à calculer (Cf. ci-dessous).

A la date t , un point du profil dont la saturation est s s'est déplacé d'une distance $D(s, t)$ (Figure 2) donnée par :

$$D(s, t) = \lambda(s) t \quad [2]$$

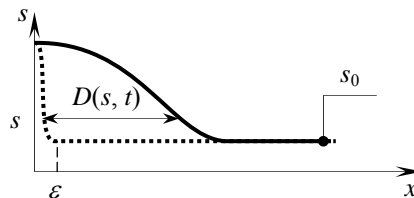


Figure 2. Évolution du profil de saturation. Profil initial (pointillés) et profil à la date t (trait gras).

On rappelle en effet que la célérité λ étant fonction de s uniquement, λ est constante à s constante. A la date t , x s'exprime donc en fonction de s de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} x(t > 0) &= \lambda(s_i)t && \text{pour } s = s_i \\ x(t > 0) &\in]\lambda(s)t, \lambda(s_0)t + \varepsilon[&& \text{pour } s_0 < s < s_i \\ s(t > 0) &= s_0 && \text{pour } x > \lambda(s_0)t + \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} x(t > 0) &= \lambda(s)t && \text{pour } s_0 < s \leq s_i \\ s(t > 0) &= s_0 && \text{pour } x > \lambda(s_0)t \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

L'expression de la célérité est donnée par l'équation [1.117]. En substituant cette expression dans [4], on obtient :

$$\left. \begin{aligned} x(t > 0) &= \frac{2(1-s)s}{[s^2 + (1-s)^2 b_{BL}]^2} b_{BL} V t && \text{pour } s_0 < s \leq s_i \\ s(t > 0) &= s_0 && \text{pour } x > \lambda(s_0)t \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

On trouvera une procédure de calcul et une illustration graphique de ce profil dans l'onglet « Profil » de la feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex14.xls>.

2.2. Question 2

On commencera par remarquer que « front de décontamination » se déplace à la vitesse $\lambda(s_0)$. La durée T_L nécessaire à ce front pour traverser l'aquifère de longueur L et ainsi parvenir à la limite aval est égale à

$$T_L = \frac{L}{\lambda(s_0)} \quad [6]$$

Par conséquent, pour les dates $t \leq T_L$, la valeur de la saturation en contaminant à la limite aval de l'aquifère demeure inchangée, égale à s_0 . Il sort donc, par la limite aval de l'aquifère, un flux constant, égal à $F(s_0)$; en revanche, il entre à la limite amont un flux $F(s_i)$. L'évolution de la saturation en eau moyenne \bar{s} dans l'aquifère est donc donnée par :

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{F(s_i) - F(s_0)}{L} \quad \text{pour } t \leq T_L \quad [7]$$

où l'expression de F est donnée par l'équation [1.111] :

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2 + (1-s)^2 b_{BL}} V$$

Autrement dit :

$$\bar{s} = s_0 + \frac{F(s_i) - F(s_0)}{L} t \quad \text{pour } t \leq T_L \quad [8]$$

A la date $t = T_L$, la saturation moyenne dans l'aquifère est ainsi :

$$\bar{s}(T_L) = s_0 + \frac{F(s_i) - F(s_0)}{\lambda(s_0)} \quad [9]$$

En faisant l'application numérique, on trouve : $T_L = 100$ jours, $\bar{s}(T_L) = 0,75$. Autrement dit, lorsque le front de décontamination atteint la limite aval de l'aquifère, la contamination moyenne de l'aquifère est encore de 25%.

Pour les dates $t \geq T_L$, la détermination de \bar{s} est un peu plus compliquée, car s n'est plus constante en $x = L$. Il faut donc calculer la valeur moyenne du profil de saturation entre $x = 0$ et $x = L$ et déterminer à quelles dates cette valeur moyenne vaut 95%, 99% et 99,5%. Pour calculer l'aire du profil de saturation, on a recours à une astuce qui consiste à représenter λ en fonction de s (Figure 3).

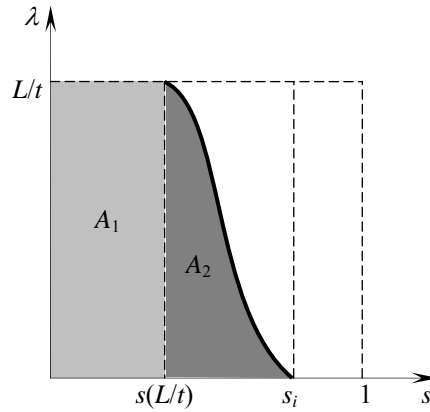


Figure 3. Calcul de l'intégrale du profil de saturation par décomposition en deux sous-domaines.

Dans ce système de coordonnées, on cherche à calculer la valeur moyenne du profil de saturation entre $\lambda = 0$ (qui correspond à $x = 0$, limite amont de l'aquifère) et $\lambda = L/t$ (qui correspond, à la date t , à la limite aval $x = L$ de l'aquifère). Il est visible sur la Figure 3 que cette aire se décompose en deux parties A_1 et A_2 , données par :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{L}{t} s(L/t) \\ A_2 &= \int_{s(L/t)}^{s_i} \lambda(s) ds \end{aligned} \right\} \quad [10]$$

où $s(L/t)$ indique la valeur de s pour laquelle λ vaut L/t . Au vu de l'expression (assez compliquée) de λ , on ne cherchera pas à déterminer $s(L/t)$ de façon analytique, on en recherchera simplement la valeur numérique. On notera que par définition de λ , la seconde équation [10] devient :

$$A_2 = F(s_i) - F(s(L/t)) \quad [11]$$

L'aire totale du profil est donc

$$A = \frac{L}{t} s(L/t) + F(s_i) - F(s(L/t)) \quad [12]$$

et la saturation moyenne :

$$\bar{s} = \frac{A}{L/t} = s(L/t) + \frac{F(s_i) - F(s(L/t))}{L} t \quad [13]$$

On trouvera une procédure de calcul approché et une illustration graphique de ce profil dans l'onglet « Saturation moyenne » de la feuille de calcul <http://vincentguinot.free.fr/ondes/ex14.xls>.