

Exercice 2.6

Équations de Saint-Venant

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.6 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère un canal rectangulaire de longueur L dont la pente du fond S_0 est uniforme. La cote du fond à l'extrémité gauche du canal est notée z_G . L'eau est initialement au repos, avec une cote de surface libre égale à ζ_0 (Figure 2.25). Dans tout ce qui suit, on suppose que les effets du frottement peuvent être négligés et que les perturbations de la surface libre et de la vitesse sont suffisamment faibles pour que les célérités de propagation d'onde puissent être considérées comme constantes dans le temps.

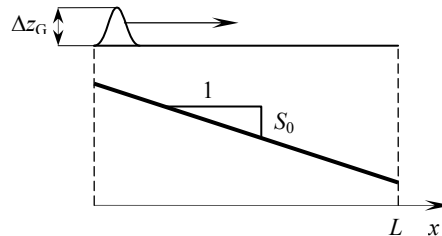


Figure 2.25. Propagation d'une perturbation dans un canal de pente de fond constante.

A $t = 0$, une perturbation apparaît à l'extrémité gauche du canal. On note Δz_G la hauteur de cette perturbation.

- 1) Déterminer les perturbations Δu_G et ΔQ_G de vitesse et de débit qui en résultent.
- 2) Représenter graphiquement la caractéristique associée à cette perturbation dans l'espace des phases. Donner la formule de la durée T_D au bout de laquelle la perturbation parvient à l'extrémité droite du canal.
- 3) Calculer la hauteur Δz_D de la perturbation lorsqu'elle parvient à l'extrémité droite du canal, ainsi que les perturbations Δu_D et ΔQ_D de vitesse et de débit.

Symbole	Signification	Valeur
b	Largeur du canal	10 m
g	Accélération de la pesanteur	$9,81 \text{ m.s}^{-1}$
L	Longueur du canal	100 m
S_0	Pente du fond du canal	10 %
z_G	Cote du fond du canal à l'extrémité gauche	0 m
Δz_G	Hauteur de la perturbation à l'extrémité gauche du canal	0,1 m
ζ_0	Cote initiale de la surface libre	1 m

Tableau 2.2. Paramètres pour le problème 2.6.

2. Réponses

2.1. Question 1

On utilise la caractéristique $dx/dt = u - c$ pour relier deux points de part et d'autre de la perturbation. Les points peuvent être placés infiniment près l'un de l'autre, si bien qu'en intégrant la relation caractéristique sur une distance nulle, l'influence du terme source dans [2.139] est nulle:

$$u_G - 2c_G = u_{G,0} - 2c_{G,0} \quad [1]$$

où c_G et u_G indiquent les valeurs de c et u juste derrière la perturbation, et $c_{G,0}$ et $u_{G,0}$ représentent les valeurs initiales de c et u à la limite gauche. [1] peut également s'écrire sous la forme

$$u_G - u_{G,0} = 2(c_G - c_{G,0}) \quad [2]$$

C'est-à-dire :

$$\Delta u_G = 2[g(\zeta_0 + \Delta\zeta - z_G)]^{1/2} - 2[g(\zeta_0 - z_G)]^{1/2} \quad [3]$$

Le débit est donné par :

$$Q_G = [g(\zeta_0 + \Delta\zeta - z_G)]^{1/2} u_G \quad [4]$$

Avec les données du Tableau 2.2, on trouve : $\Delta u_G = 0,31 \text{ m.s}^{-1}$ et $\Delta Q_G = 3,36 \text{ m.s}^{-1}$.

2.2. Question 2

On a fait l'hypothèse que l'apparition de la perturbation en débit ne causait pas de modification significative des célérités d'onde ; cela signifie que les célérités des différentes ondes restent identiques aux célérités de l'état initial. A l'état initial, la vitesse est nulle, donc l'équation de la caractéristique qui se propage vers la droite se réduit à

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(2)} \approx c_0(x, t = 0) = [(\zeta_0 - z_b(x))g]^{1/2} \quad [5]$$

On désigne ici c_0 la célérité des ondes de pression à $t = 0$. On notera que c_0 n'est pas une constante mais dépend de x . La pente du fond S_0 étant constante, [5] devient :

$$\frac{dx}{dt} = [(\xi_0 - z_G + S_0 x)g]^{1/2} \quad [6]$$

Cette équation s'intègre en :

$$t - t_0 = 2 \left(\frac{x}{gS_0} + \frac{\xi_0 - h_G}{gS_0^2} \right)^{1/2} - 2 \left(\frac{x_0}{gS_0} + \frac{\xi_0 - h_G}{gS_0^2} \right)^{1/2} \quad [7]$$

Cette équation est celle de la caractéristique passant par le point (x_0, t_0) dans l'espace des phases. Dans le cas de la perturbation partant de $x_0 = 0$ à $t_0 = 0$, [7] se simplifie en :

$$t = 2 \left(\frac{x}{gS_0} + \frac{\xi_0 - h_G}{gS_0^2} \right)^{1/2} - 2 \left(\frac{\xi_0 - h_G}{gS_0^2} \right)^{1/2} \quad [8]$$

La caractéristique est représentée sur la Figure 1. Les données utilisées sont celles du Tableau 2.2. La durée nécessaire à l'onde pour atteindre l'extrémité du canal est 14,8 s.

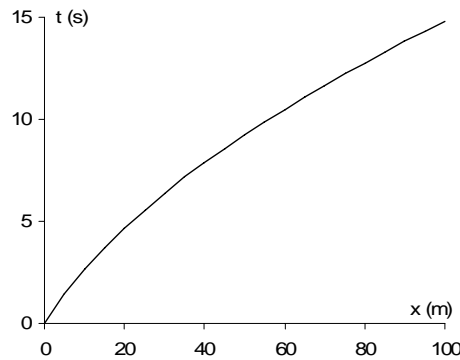


Figure 1. Trajectoire de la perturbation dans l'espace des phases.

2.3. Question 3

On suit la caractéristique $dx/dt = c_0$ issue de $x = 0$ à $t = 0$ (Figure 2). Le long de cette caractéristique, la deuxième équation [2.139] s'applique (on néglige le frottement) :

$$\frac{d}{dt}(u + 2c) = S_0 g \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = c_0 \quad [9]$$

où u et c désignent la valeur de la vitesse et de la célérité des ondes de pression juste derrière la perturbation. Comme l'on s'intéresse davantage à l'évolution de la perturbation lors de son déplacement dans l'espace, on transforme [9] en une équation par rapport à x en notant que $dx = c_0 dt$, donc que $d/dt = c_0 d/dx$:

$$\frac{d}{dx}(u + 2c) = \frac{gS_0}{c_0} \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = c_0 \quad [10]$$

De plus, en chaque point (x, t) de la caractéristique $dx/dt = c$, on peut faire passer une caractéristique $dx/dt = -c$ qui relie l'avant et l'arrière de la perturbation (courbe pointillée sur la Figure 2).

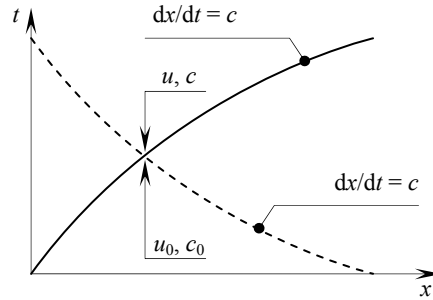


Figure 2. Trajectoire de la perturbation dans l'espace des phases.

La distance entre le point (u, c) immédiatement derrière la perturbation et le point (u_0, c_0) immédiatement devant la perturbation est nulle. Par conséquent, l'intégration de la première équation [2.139] sur une distance nulle donne :

$$u - 2c = u_0 - 2c_0 \quad [11]$$

On rappelle que la célérité initiale c_0 des ondes de pression dépend de x (Cf. [5])

$$c_0(x) = [(\zeta_0 - z_G + S_0 x)g]^{1/2} \quad [12]$$

En dérivant [11] le long de la caractéristique $dx/dt = c_0$, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(u - 2c) = -2 \frac{dc_0}{dx} \quad \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \quad [13]$$

En sommant et en faisant la différence des équations [10] et [14], on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{S_0 g}{2c} - \frac{dc_0}{dx} & \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \\ \frac{dc}{dx} &= \frac{S_0 g}{4c} + \frac{1}{2} \frac{dc_0}{dx} & \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

Or, d'après [12] :

$$\frac{dc_0}{dx} = \frac{1}{2} \frac{g \frac{dh_0}{dx}}{[(\zeta_0 - z_b(x))g]^{1/2}} = \frac{gS_0}{2c_0} \quad [15]$$

On notera que cette égalité provient du fait que la surface libre est initialement horizontale. L'hypothèse de pente constante n'est pas nécessaire. En substituant [12] et [15] dans [14], on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du}{dx} = 0 \\ \frac{dc}{dx} = \frac{dc_0}{dx} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \\ \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \end{array} \quad [16]$$

Ce qui donne

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = u_G \\ c(x) - c_0(x) = c_G - c_0(0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \\ \text{pour } \frac{dx}{dt} = c \end{array} \quad [17]$$

La perturbation en vitesse est inchangée, comme la perturbation sur la célérité. En effet, la quantité $c_G - c_0(0)$ représente la perturbation de la célérité par rapport à l'état initial en tête du canal, et la quantité $c(x) - c_0(x)$ représente la perturbation de la célérité par rapport à l'état initial à l'abscisse x . La perturbation en célérité ne change pas à mesure de sa progression dans le canal. Or, à profondeur plus grande, une perturbation identique sur la célérité se traduit par une perturbation plus importante sur la hauteur d'eau (en effet, $h = c^2/g$). La hauteur de la perturbation augmente donc lorsque l'on va vers des profondeurs plus grandes et diminue si la profondeur diminue (Cf. feuille de calcul sur ces pages web).

Si ce résultat vous paraît absurde, vous pouvez féliciter soit votre intuition, soit votre sens physique (ou les deux). En effet, une onde qui se propage vers des profondeurs plus importantes doit mobiliser une colonne d'eau plus importante, c'est-à-dire une colonne d'eau dont l'inertie est plus élevée. Par conséquent, l'amplitude de la perturbation (en vitesse ou en profondeur) devrait diminuer avec la profondeur. Inversement, en allant vers des profondeurs plus faibles (si la pente S_0 est négative), l'amplitude de la perturbation doit augmenter.

La raison du comportement apparemment absurde de la solution de cet exercice réside dans les hypothèses mêmes de l'énoncé : on a supposé que la célérité de propagation des ondes pouvait être assimilée à une constante dans le temps. Or ceci est faux, car la célérité de l'onde, qui est une fonction de la vitesse et de la profondeur, varie avec le passage de la perturbation. Le simple fait de négliger les variations dans le temps de $u - c$ et $u + c$ conduit donc à des résultats physiquement absurdes.

La Figure 3 montre la propagation simulée d'une perturbation de hauteur 1 cm dans un canal où la pente du fond est de 1%. On a utilisé la méthode des caractéristiques du 1^{er} ordre (Cf. chapitre 6, exercice 6.2).

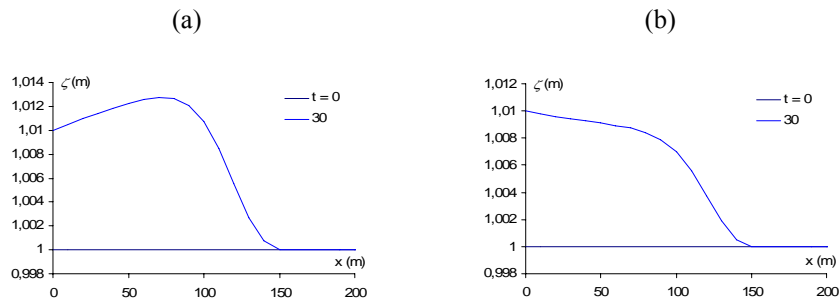


Figure 3. Lignes d'eau calculées par la méthode des caractéristiques. Célérités d'ondes calculées d'après l'état initial (a) et recalculées à chaque pas de temps (b).

La Figure 3a montre les résultats obtenus en faisant l'hypothèse que $u - c \approx -c_0$ et $u + c \approx c_0$. L'amplitude de la perturbation croît bien avec la profondeur, conformément aux résultats « non-physiques » de la question 3. La Figure 3b montre les résultats, beaucoup plus réalistes, en réactualisant les valeurs de $u - c$ et $u + c$ en fonction des valeurs locales de u et de c .

Cet exemple montre que les simplifications, même justifiées en apparence, doivent être prises avec prudence sous peine d'obtenir des résultats physiquement non fondés.

N.B. : ce problème ne se rencontre pas dans le cas du coup de bélier avec changement de section de la conduite car, dans le cas du coup de bélier, la célérité *est* effectivement constante dans le temps.