

Exercice 1.3

Équation de l'onde cinématique

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 1.3 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère un canal rectangulaire de largeur b et de coefficient de Strickler K_{Str} uniformes. Le canal comprend trois zones délimitées par les abscisses x_1 et x_2 (Figure 1.26) :

- à gauche de $x = x_1$, la pente S_0 du fond est égale à la valeur constante $S_{0,1}$;
- à droite de $x = x_2$, la pente S_0 du fond est égale à la valeur constante $S_{0,2}$;
- entre x_1 et x_2 , la pente du fond varie de $S_{0,1}$ à $S_{0,2}$. Le détail des variations n'est pas connu.

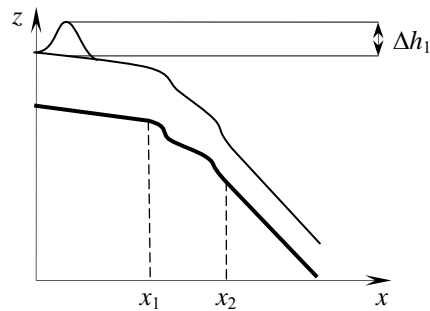


Figure 1.26. Propagation d'une onde de débit dans un canal à pente variable.

Le débit initial Q dans le canal est uniforme, le régime permanent est atteint. On suppose la largeur du canal très grande devant la profondeur h , si bien que le rayon hydraulique peut être assimilé à la profondeur d'eau. Les valeurs des paramètres physiques sont consignées dans le Tableau 1.4.

Une perturbation ΔQ_1 apparaît en tête du canal et se propage vers l'aval (dans le sens des x croissants). On suppose que ΔQ_1 est très petit devant Q , si bien que les célérités dans les différentes parties du canal restent inchangées au passage de la perturbation.

Symbole	Signification	Valeur
b	Largeur du chenal	40 m
K_{Str}	Coefficient de Strickler	40
Q	Débit initial	$10 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
$S_{0,1}$	Pente du fond du canal en amont de x_1	0,1%
$S_{0,2}$	Pente du fond du canal en aval de x_2	1%
ΔQ_1	Perturbation de débit	$1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Tableau 1.4. Paramètres pour le problème 1.3.

1) Exprimer la hauteur Δh_1 de la perturbation à l'amont du chenal en fonction de b , Q , K_{Str} , $S_{0,1}$ et ΔQ_1 .

2) Calculer la hauteur Δh_2 de la perturbation à son passage en x_2 , ainsi que la perturbation ΔQ_2 correspondante sur le débit.

2. Solution

2.1. Question 1

Sous l'hypothèse que la variation de débit est très faible, on a $dQ = \lambda dA$. Sous l'hypothèse de canal rectangulaire de largeur b , cette relation devient :

$$\lambda_1 b \Delta h_1 = \Delta Q_1 \quad [1]$$

où λ_1 est la célérité dans la partie amont du bief, donnée par :

$$\lambda_1 = \frac{5}{3} K_{\text{Str}} S_{0,1}^{1/2} h_1^{2/3} \quad [2]$$

h_1 étant la hauteur d'eau (encore inconnue), liée au débit Q par la loi de Strickler sous l'hypothèse du canal large :

$$Q = K_{\text{Str}} S_{0,1}^{1/2} b h_1^{5/3} \quad [3]$$

En substituant [3] dans [2] :

$$\lambda_1 = \frac{5}{3} K_{\text{Str}} S_{0,1}^{1/2} \left(\frac{Q}{b K_{\text{Str}} S_{0,1}^{1/2}} \right)^{2/5} \quad [4]$$

En remplaçant [4] dans [1] :

$$\Delta h_1 = \frac{3}{5} \frac{1}{(b K_{\text{Str}} S_{0,1}^{1/2})^{3/5}} \frac{\Delta Q_1}{Q^{2/5}} \quad [5]$$

2.2. Question 2

En observant que $A = bh$, on écrit la forme non conservative [1.87] sous la forme caractéristique suivante :

$$\frac{dh}{dt} = S' \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [6]$$

où λ et S' sont donnés par [1.106], en divisant la deuxième équation [1.106] par b :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{5}{3} K_{\text{Str}} S_0^{1/2} h^{2/3} \\ S' &= -h^{5/3} K_{\text{Str}} \frac{\partial}{\partial x} (S_0^{1/2}) \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

Pour obtenir l'évolution de la hauteur Δh de la perturbation entre x_1 et x_2 , il suffit d'intégrer l'équation [6]. Plutôt que de l'intégrer par rapport au temps, il est préférable de l'intégrer par rapport à la coordonnée d'espace, car l'évolution de S_0 entre x_1 et x_2 est connue. On réécrit donc [6] par rapport à la coordonnée d'espace. En posant $dx = \lambda dt$, [6] devient :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S'}{\lambda} \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [8]$$

Soit, d'après [7] :

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{3h}{5S_0^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} (S_0^{1/2}) \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [9]$$

En développant la dérivée de $S_0^{1/2} d(\ln h)$, on obtient :

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{3h}{10} \frac{\partial}{\partial x} (\ln S_0) \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [10]$$

Soit :

$$d(\ln h) = -\frac{3}{10} d(\ln S_0) \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad [11]$$

En intégrant [11] entre x_1 et x_2 , on passe de la pente $S_{0,1}$ à la pente $S_{0,2}$. On obtient donc l'égalité suivante :

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{S_{0,1}}{S_{0,2}} \right)^{3/10} \quad [12]$$

On notera au passage que [12], établie pour une perturbation transitoire, s'applique également au régime permanent (le soin de cette démonstration est laissé à la lectrice/au lecteur). En appliquant [12] à la perturbation Δh_1 , on obtient :

$$\Delta h_2 = \left(\frac{S_{0,1}}{S_{0,2}} \right)^{3/10} \Delta h_1 \quad [13]$$

La perturbation ΔQ_2 en débit se déduit de Δh_2 en appliquant [1] au second bief :

$$\Delta Q_2 = \lambda_2 b \Delta h_2 \quad [14]$$

Donc

$$\Delta Q_2 = \frac{\lambda_2 \Delta h_2}{\lambda_1 \Delta h_1} \Delta Q_1 \quad [15]$$

Le rapport λ_2/λ_1 se déduit de [7] et de [12] :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{S_{0,2}^{1/2} h_2^{2/3}}{S_{0,1}^{1/2} h_1^{2/3}} = \left(\frac{S_{0,2}}{S_{0,1}} \right)^{3/10} \quad [16]$$

En substituant [16] et [13] dans [15], on obtient :

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_1 \quad [17]$$