

Exercice 3.5

Équations d'Euler

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 3.5 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

Un avion se déplace à Mach 1 dans de l'air initialement immobile. Pour faciliter l'analyse, on se place dans un référentiel se déplaçant avec l'avion.

1) Écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en supposant le régime permanent atteint. On supposera que dans le référentiel fixé au nez de l'avion, la vitesse est nulle au niveau du nez. Montrer que, si l'on fait l'hypothèse d'un choc stationnaire, l'écoulement ne peut pas être unidimensionnel et qu'il doit nécessairement exister un « débit de fuite » latéral.

2) Déterminer ce débit de fuite ainsi que la surpression et la masse volumique de l'air au droit du nez de l'avion pour les paramètres donnés dans le Tableau 3.1.

3) Vérifier le principe d'entropie au passage du choc.

Symbole	Signification	Valeur
M_0	Nombre de Mach à l'infini amont dans le référentiel de l'avion	1
p_0	Pression à l'infini amont	10^5 Pa
γ	Constante polytropique des gaz parfaits	1,4
ρ_0	Masse volumique à l'infini amont	$1,2 \text{ kg.m}^{-3}$

Tableau 3.1. Paramètres du problème 3.5.

2. Réponses**2.1. Question 1**

En se plaçant dans un repère se déplaçant avec l'avion, les relations de saut s'écrivent (en tenant compte de l'hypothèse de vitesse nulle au niveau du nez de l'avion) :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 u_0 &= (\rho_0 - \rho_1) c_s \\ \rho_0 u_0^2 + p_0 - p_1 &= \rho_0 u_0 c_s \\ (E_0 + p_0) u_0 &= (E_0 - E_1) c_s \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Où l'indice 0 désigne les valeurs à l'infini amont et l'indice 1 désigne les valeurs au niveau du nez de l'avion.

Si le choc est stationnaire, il se déplace à la même vitesse que l'avion, donc $c_s = 0$. Au vu de la première équation [1], cela n'est possible que si l'on rajoute un « débit de fuite » latéral, qui « soustrait » une quantité de masse fixe par unité de temps au système.

2.2. Question 2

Les équations modifiées s'écrivent, en tenant compte de l'hypothèse $c_s = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 u_0 &= q \rho_1 \\ \rho_0 u_0^2 + p_0 - p_1 &= 0 \\ (E_0 + p_0) u_0 &= q E_1 \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

où q est le débit de fuite. A noter que q intervient également dans la deuxième équation [2], car il introduit une « fuite » de quantité de mouvement égale à $q \rho u_1$, mais la vitesse u_1 étant nulle, ce débit disparaît. On tire directement la pression p_1 de la deuxième équation [2] :

$$p_1 = p_0 + \rho_0 u_0^2 \quad [3]$$

La vitesse u_0 est celle qui correspond à Mach 1, c'est-à-dire $u_0 = c_0$. La vitesse du son étant donnée par [2.207], on a $\rho_0 u_0^2 = \rho_0 c_0^2 = \gamma p_0$. Alors, [3] devient :

$$p_1 = (\gamma + 1) p_0 \quad [4]$$

La première et la troisième équation [2] donnent :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 u_0 &= q \rho_1 \\ \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) u_0 p_0 &= q \frac{p_1}{(\gamma - 1)} \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

En substituant [4] dans la seconde équation [5], on obtient le débit de fuite :

$$q = \frac{\gamma^2 - \gamma + 2}{2(\gamma + 1)} u_0 \quad [6]$$

On en tire la masse volumique ρ_1 en substituant [6] dans la première équation [5]:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 u_0}{q} = \rho_0 \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma^2 - \gamma + 2} \quad [7]$$

L'application numérique donne : $p_1 = 2,4.10^5 \text{ Pa}$, $q = 182 \text{ m.s}^{-1}$ et $\rho_1 = 2,25 \text{ kg.m}^{-3}$.

2.3. Question 3

On rappelle que l'entropie s est donnée par [2.178] :

$$ds = \frac{R}{\gamma - 1} d \left[\ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \right]$$

Donc l'entropie est donnée par

$$s_1 = s_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right) \quad [8]$$

Et l'entropie par unité de volume est donnée par :

$$\rho_1 s_1 = \rho_1 s_0 + \rho_1 \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right) \quad [9]$$

Donc

$$\rho_1 s_1 - \rho_0 s_0 = (\rho_1 - \rho_0) s_0 + \rho_1 \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \right) \quad [10]$$

Le second terme du membre de droite est positif et vaut 4,3. ρ_1 étant supérieure à ρ_0 , s_0 étant positive, la quantité $\rho_1 s_1$ est supérieure à $\rho_0 s_0$.

N.B. : ceci peut être démontré de façon plus rigoureuse en montrant que p/ρ^γ croît au travers du choc.