

Exercice 3.3

Équation de Buckley-Leverett

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 3.3 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère l'aquifère de l'exercice 1.4 (Cf. 1.8.2.4), avec les données du Tableau 1.5. On suppose cette fois-ci que l'aquifère est contaminé à 90% par l'hydrocarbure (la saturation en eau initiale s_0 n'est donc que de 0,1). Comme dans le problème 1.4, on injecte de l'eau pure à la vitesse de Darcy V pour décontaminer l'aquifère.

- 1) Montrer que le profil de saturation à $t > 0$ est donné par une onde mixte.
- 2) Calculer la vitesse de déplacement du choc à l'amont de l'onde mixte.
- 3) Déterminer la durée nécessaire pour que la contamination moyenne de l'aquifère ne soit plus que de 5%, 1% et 0,5 %.

Symbole	Signification	Valeur
b_{BL}	Paramètre de forme pour le flux de Buckley-Leverett	1
L	Longueur de l'aquifère	200 m
s_0	Saturation en eau initiale dans l'aquifère	0,1
s_i	Saturation en eau au point d'injection ($x = 0$)	1
V	Vitesse de Darcy	1 m.j^{-1}

Tableau 1.5. Paramètres pour le problème 1.4.

2. Réponses

2.1. Question 1

Comme pour l'exercice 1.4, on exprime x en fonction de s . On a vu dans l'exercice 1.4 que le profil de saturation pouvait s'exprimer de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} x(t > 0) &= \lambda(s)t && \text{pour } s_0 < s \leq s_i \\ s(t > 0) &= s_0 && \text{pour } x > \lambda(s_0)t \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Cependant, dans cet exercice s_0 et s_i sont situés de part et d'autre de la saturation s_{\max} pour laquelle la célérité de l'onde est maximale (comme $b_{BL} = 1$, $s_{\max} = 1/2$). Si l'on appliquait l'équation [1] telle quelle, on obtiendrait le profil de la Figure 1.

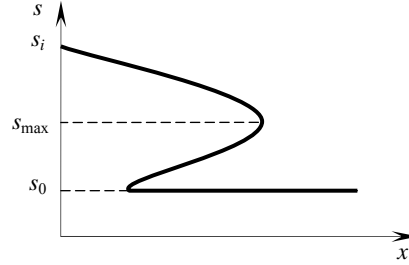


Figure 1. Profil de saturation d'après l'équation [1].

La courbe $x(s)$ présente un maximum à $s = s_{\max}$, ce qui revient à dire qu'il existe une zone dans laquelle le profil $s(x)$ peut prendre trois valeurs, ce qui n'est pas physiquement admissible. La seule solution physiquement admissible qui conserve la masse est une onde mixte, dont on peut obtenir la position par la méthode d'égalité des aires (Figure 2).

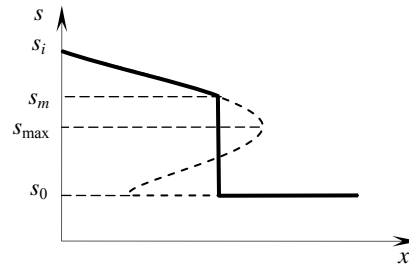


Figure 2. Profil de saturation avant (trait pointillé) et après (trait gras) correction par la méthode d'égalité des aires.

2.2. Question 2

Le choc de l'onde mixte se déplace à une vitesse c_m donnée par :

$$F(s_m) - F(s_0) = (s_m - s_0)c_m \quad [2]$$

où s_m est la saturation au niveau du choc. De plus, le point de saturation $s = s_m$ étant également situé sur l'onde de raréfaction, on a :

$$c_m = \lambda(s_m) = \frac{dF}{ds}(s_m) \quad [3]$$

En remplaçant [3] dans [2], il vient :

$$F(s_m) - F(s_0) = (s_m - s_0)\lambda(s_m) \quad [4]$$

L'équation [4] forme une équation non linéaire à résoudre par rapport à s_m . On peut l'explicitier en reprenant la définition du flux F (Cf. 1.6) :

$$\frac{s_m^2}{s_m^2 + (1 - s_m)^2 b_{BL}} - 2(s_m - s_0) \frac{(1 - s_m)s_m b_{BL}}{\left[s_m^2 + (1 - s_m)^2 b_{BL}\right]^2} = \frac{F(s_0)}{V_d} \quad [5]$$

Cette équation se résout de façon approchée. Pour les données du Tableau, on trouve $s_m = 0,675$ et $c_m = 1,39$ m/j (Cf. feuille de calcul jointe).

2.3. Question 3

Cette question est résolue de la même manière que dans l'exercice 1.4. On se reportera à cet exercice pour le détail de la méthode.