

Exercice 4.1

Équations de Saint-Venant

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 4.1 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

Résoudre le problème de Riemann pour les données initiales suivantes (on exploitera la symétrie) :

$$\left. \begin{array}{l} h_L = h_R \\ u_L = -u_R \end{array} \right\} \quad [4.63]$$

Montrer que suivant le signe de u_L , la nature des ondes présentes dans la solution est différente ; déterminer complètement la solution dans chaque cas ; montrer que pour $u_L < 0$, une zone d'assèchement peut apparaître si u_L est inférieure à une certaine valeur seuil, que l'on déterminera. En utilisant les propriétés de symétrie de la solution, montrer que ce problème de Riemann peut être utilisé pour résoudre des problèmes aux limites, tels que les conséquences de la fermeture instantanée d'une vanne située dans un canal.

2. Réponses

La solution du problème de Riemann pour les équations de Saint-Venant consiste en une zone d'état constant séparée de l'état gauche et droit par deux ondes de raréfaction ou de choc.

2.1. Remarque préliminaire : symétrie

La symétrie permet d'établir les propriétés suivantes :

– le problème de Riemann reste identique si l'on change le sens de l'axe des x (en effet, dans ce cas on intervertit les états gauche et droit et l'on change le signe des vitesses). Par conséquent, la vitesse u^* dans la zone intermédiaire d'état constant vérifie $u^* = -u^*$, donc :

$$u^* = 0 \quad [1]$$

– l'onde à gauche et à droite sont de même nature et se propagent à des célérités opposées. Il suffit donc de déterminer par exemple l'onde gauche pour déterminer complètement la solution.

2.2. Cas $u_L > 0$

Dans le cas où la vitesse u_L de l'état gauche est positive, les méthode heuristique comme les invariants de Riemann donnent la même indication : la célérité $u^* - c^*$ dans l'état intermédiaire est supérieure à la célérité $u_L - c_L$ dans l'état gauche. L'onde qui se dirige vers la gauche devrait donc être une onde de choc. Dans ce cas, u^* et c^* sont reliés à u_L et c_L par les relations de Rankine-Hugoniot :

$$\left. \begin{aligned} u_L h_L &= (h_L - h^*) c_s \\ u_L^2 h_L + \frac{g}{2} (h_L^2 - h^{*2}) &= u_L h_L c_s \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

où c_s est la vitesse (négative) du choc. Dans ces deux égalités, on a tenu compte de [1].

En substituant la première équation [2] dans la deuxième pour éliminer la vitesse inconnue du choc et en multipliant par $h_L - h^*$, on obtient :

$$u_L^2 h_L (h_L - h^*) + \frac{g}{2} (h_L^2 - h^{*2})^2 (h_L - h^*) = (u_L h_L)^2 \quad [3]$$

On définit la fonction $f(h)$ par :

$$f(h) = \left[u_L^2 h_L + \frac{g}{2} (h_L^2 - h^2) \right] (h_L - h) \quad [4]$$

Avec cette définition, h^* est la valeur de h pour laquelle f satisfait :

$$f(h^*) = (u_L h_L)^2 \quad [5]$$

Une étude rapide de variations montre que :

- cette fonction s'annule pour $h = h_L$;
- sa dérivée est positive pour $h < h_1$ et $h > h_2$, où h_1 est négative et h_2 est supérieure à h_L .

Par conséquent, h^* est à rechercher, soit entre h_1 et h_L , soit pour des valeurs supérieures à h_2 . Or, la première équation [2] permet de voir que, puisque c_s est négative, la hauteur d'eau h^* dans la zone intermédiaire d'état constant est nécessairement supérieure à h_L . La seule solution possible est donc de rechercher h^* dans la gamme de valeurs de h supérieures à h_2 . On peut facilement déterminer la valeur numérique de h^* en résolvant [5] par une méthode du type Newton-Raphson. On conseille d'initialiser les itérations en utilisant les invariants de Riemann qui, on l'a vu au chapitre 3, constituent une approximation des relations de saut. L'hypothèse d'invariance de la quantité $u + 2c$ au travers de l'onde négative donne :

$$c^* = \frac{u_L}{2} + c_L \quad [6]$$

$$\text{et } h^* = c^2/g.$$

2.3. Cas $u_L < 0$

Dans ce cas, on obtient une onde de raréfaction. L'écoulement étant continu, les invariants de Riemann sont utilisables au travers de cette onde, et [6] s'applique rigoureusement.

On notera que dans ce cas, la célérité c^* (donc la profondeur h^*) devient nulle pour la valeur suivante de u_L :

$$u_L^{\text{sec}} = -2c_L \quad [7]$$

Toute valeur de u_L inférieure à cette valeur limite entraîne la création d'une zone d'assèchement (Figure 1). Cette zone progresse à la vitesse $u - c$, où u et c vérifient :

$$\left. \begin{array}{l} u + 2c = u_L + 2c_L \\ c = 0 \end{array} \right\} \quad [8]$$

La première égalité vient de l'invariance de l'invariant $u + 2c$; la seconde vient de l'hypothèse d'assèchement, c'est-à-dire $h = 0$, donc $u = 0$. On obtient donc :

$$u = u_L + 2c_L < 0 \quad [9]$$

2.4. Exploitation des propriétés de symétrie

La remarque faite au 2.1 conduit à la conclusion suivante : n'importe quelle situation requérant un débit nul en un point donné peut s'obtenir en définissant un problème de Riemann en ce point, où l'état gauche et l'état droit sont symétriques.