

Exercice 2.5

Équations de Saint-Venant

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.5 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

On considère un canal rectangulaire de largeur b et de pente S_0 où le coefficient de Strickler K_{Str} est uniforme. On suppose le régime permanent et uniforme, c'est-à-dire que la pente de la ligne d'énergie peut être assimilée à la pente du fond du canal.

1) Exprimer la célérité λ de l'onde cinématique en fonction de la hauteur d'eau h . On supposera que l'approximation du canal large est valable, c'est-à-dire que h est suffisamment petit devant b pour que le rayon hydraulique puisse être assimilé à la profondeur h .

2) Exprimer les célérités $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ des ondes des équations de Saint-Venant en fonction de la profondeur h , en supposant que l'hypothèse de régime uniforme est toujours valable (cette hypothèse permettra de relier la vitesse u de l'écoulement à la profondeur h).

3) Comparer les deux expressions pour les valeurs de paramètres données dans le Tableau 2.1. Conclure sur la validité pratique de l'approximation de l'onde cinématique.

Symbole	Signification	Valeur
b	Largeur du canal	10 m
g	Accélération de la pesanteur	9,81 m.s ⁻¹
K_{Str}	Coefficient de Strickler	40
S_0	Pente du fond du canal	0,1 %, 1% et 5%

Tableau 2.1. Paramètres pour le problème 2.5.

2. Réponses

On se souvient que, dans le cas d'un canal rectangulaire sous l'approximation du canal large, la célérité λ_c de l'onde cinématique est donnée par (Cf. exercice 1.2) :

$$\lambda_C = \frac{5}{3}u = \frac{5}{3}K_{\text{Str}}S_0^{1/2}h^{2/3} \quad [1]$$

où u est la vitesse de l'écoulement. Dans le cas des équations de Saint-Venant, les célérités $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ des ondes sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(1)} &= u - c = K_{\text{Str}}S_0^{1/2}h^{2/3} - (gh)^{1/2} \\ \lambda^{(2)} &= u + c = K_{\text{Str}}S_0^{1/2}h^{2/3} + (gh)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

La Figure 1 illustre le comportement des trois célérités d'onde pour des pentes de 10^{-3} , 10^{-2} et $5 \cdot 10^{-2}$.

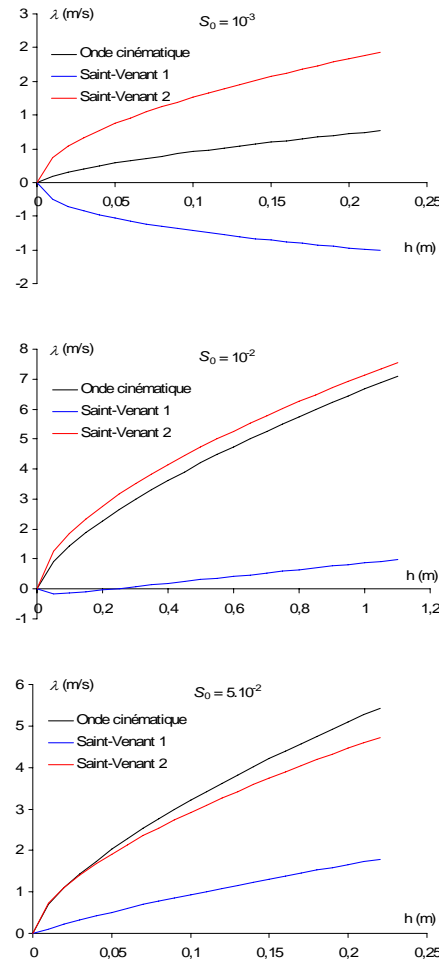


Figure 1. Évolution des célérités d'onde avec la profondeur pour diverses valeurs de la pente en canal rectangulaire.

En conclusion, l'onde cinématique parvient assez bien à représenter la propagation de l'onde de célérité $u + c$ (c'est-à-dire l'onde la plus rapide) pour des profondeurs modérées, pourvu que la pente du fond soit assez importante (de l'ordre du pourcent ou davantage). Pour une pente de 10^{-3} , en revanche, les célérités de l'onde cinématique et de l'onde de Saint-Venant la plus rapide sont dans un rapport de 1 à 3 pour des profondeurs de l'ordre de la dizaine de centimètres. Pour que la célérité de l'onde cinématique à une pente de 10^{-3} soit à peu près égale à celle de

l'onde de Saint-Venant, il faudrait se placer à des profondeurs de l'ordre de la cinquantaine ou la centaine de mètres (Figure 2), ce qui n'est pas réaliste.

A noter que, sous l'hypothèse de régime uniforme, le régime finit toujours par devenir torrentiel (supercritique) au-delà d'une certaine profondeur. On pourra s'amuser à déterminer l'expression de cette profondeur.

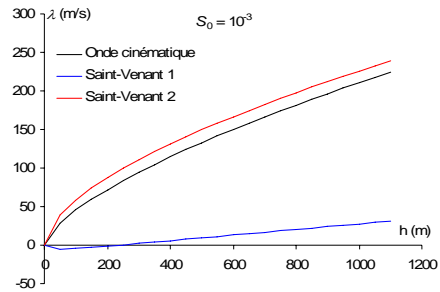


Figure 1. Évolution des célérités d'onde avec la profondeur pour un canal rectangulaire de pente $S_0 = 10^{-3}$.