

## Exercice 2.2

# Coup de béliet

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.2 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

### 1. Rappel de l'énoncé

On considère une conduite horizontale de section constante  $A$ , où la célérité est constante par morceaux. À gauche du point d'abscisse  $x_0$ , la célérité est égale à  $c_1$  ; elle est égale à  $c_2$  à droite de ce point. L'écoulement est initialement au repos, à la pression uniforme  $p_0$ . Dans tout ce qui suit, on négligera les effets des frottements.

À  $t = 0$ , la pression à l'extrémité gauche de la conduite passe instantanément à la valeur  $p_1$ . Il s'ensuit une discontinuité de pression se propageant à la célérité  $c_1$  vers la droite de la conduite.

1) Donner l'expression du débit  $Q_1$  à gauche de l'onde de pression.

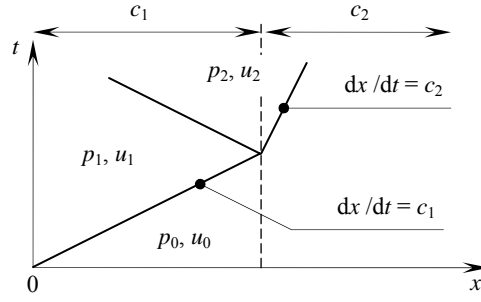
2) L'onde de pression parvient en  $x = x_0$ . En utilisant l'argument de continuité de la pression en  $x = x_0$ , montrer que la pression et le débit subissent une nouvelle variation au moment où l'onde de pression parvient en  $x_0$ . Exprimer la pression  $p_2$  et le débit  $Q_2$  en  $x = x_0$  en fonction de  $p_0, p_1$ , et des célérités  $c_1$  et  $c_2$ .

3) Montrer que si  $c_2 > c_1$ , la variation de pression est amplifiée lorsque l'onde parvient en  $x_0$  (en d'autres termes,  $|p_2 - p_0| > |p_1 - p_0|$ ). Montrer au contraire que si  $c_2 < c_1$ , la variation de pression est atténuée. Interpréter ce résultat sur la base d'arguments physiques.

### 2. Réponses

#### 2.1. Question 1

On utilise les relations [2.82] le long de la première caractéristique entre les domaines  $(p_0, u_0)$  et  $(p_1, u_1)$  (Figure 1).



**Figure 1.** Onde de pression dans l'espace des phases.

$$p_1 - p_0 = (u_1 - u_0)\rho c_1 \quad [1]$$

En multipliant [1] par la section de la conduite et en se rappelant que  $Q_0 = 0$ , on obtient :

$$Q_1 = \frac{A}{\rho c_1} (p_1 - p_0) \quad [2]$$

## 2.2. Question 2

On justifie l'argumentation de continuité de la pression de la façon suivante : on considère un volume de contrôle de longueur infinitésimal englobant la discontinuité de célérité. En régime permanent, ce volume de contrôle ne subit par définition aucune accélération. D'après le théorème fondamental de la dynamique, la pression est donc la même sur chaque face de ce volume de contrôle. La pression est donc continue au niveau de la discontinuité de célérité.

On peut relier la région  $(p_1, u_1)$  à la région  $(p_2, u_2)$  par une caractéristique  $dx/dt = c_1$ . De même, on peut relier la région  $(p_0, u_0)$  à la région  $(p_2, u_2)$  par une caractéristique  $dx/dt = -c_2$ . On obtient alors le système suivant d'équations :

$$\left. \begin{aligned} p_2 + \rho c_1 u_2 &= p_1 + \rho c_1 u_1 \\ p_2 - \rho c_2 u_2 &= p_0 - \rho c_2 u_0 \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

On en tire l'expression de  $p_2$  :

$$p_2 = \frac{c_2 p_1 + c_1 p_0}{c_1 + c_2} + \frac{\rho c_1 c_2}{c_1 + c_2} (u_1 - u_0) \quad [4]$$

En substituant [1] dans [4], on obtient une expression où n'interviennent que les pressions :

$$p_2 = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} p_1 + \frac{2c_1}{c_1 + c_2} p_0 \quad [5]$$

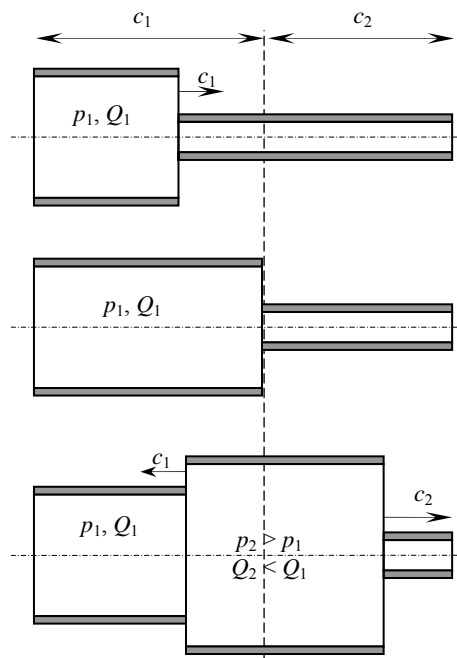
### 2.3. Question 3

On peut récrire [5] sous la forme :

$$p_2 - p_0 = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}(p_1 - p_0) \quad [6]$$

Par conséquent, si  $c_2 > c_1$ , la variation de pression est amplifiée ; si  $c_2 < c_1$ , la variation de pression est amortie.

On donne ici une interprétation physique uniquement pour le premier cas (le second s'en déduisant par un raisonnement identique). Supposons qu'une surpression arrive par la gauche à la discontinuité (Figure 2a). Le fait que  $c_2$  soit supérieure à  $c_1$  implique que la rigidité de la conduite est supérieure à droite de la discontinuité. Par conséquent, la conduite se déforme moins facilement dans la région  $c = c_2$  que dans la région  $c = c_1$ . Lorsque l'onde de surpression parvient à la discontinuité, la conduite  $c_2$  ne pourra pas se déformer pas suffisamment pour admettre tout le débit qui transite dans la région  $c_1$ . La région  $c_2$  va donc « refuser » une partie du débit  $Q_1$  et le débit  $Q_2$  est inférieur à  $Q_1$ . L'eau continuant d'arriver à un débit  $Q_1$  par la gauche de la conduite, elle s'accumule au niveau de la discontinuité en célérité. L'accumulation d'eau entraîne une (légère) augmentation de la masse volumique, qui crée une augmentation de la pression, laquelle dilate (légèrement) la conduite.



**Figure 2.** Surpression parvenant dans une région de célérité supérieure.

A noter que la Figure 2 (bas) n'est pas rigoureusement exacte car, puisque  $c_1 < c_2$ , le diamètre de la conduite augmente davantage dans la région  $c_1$  que dans la région  $c_2$ .