

Exercice 2.7

Équations d'Euler

Ce document donne les grandes lignes du corrigé de l'exercice 2.7 de l'ouvrage « Ondes en mécanique des fluides », auteur V. Guinot, Éditions Hermès Sciences.

1. Rappel de l'énoncé

Un haut-parleur peut être schématisé comme une membrane plane de surface A soumise à un déplacement dans la direction de sa normale (Figure 2.26). On note x l'axe suivant lequel s'effectue ce déplacement.

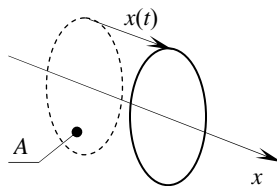


Figure 2.26. Représentation schématique d'une membrane de haut-parleur.

Dans les enceintes ordinaires, les deux faces de la membranes sont mises en communication avec l'air libre (la caisse d'une enceinte comporte sur la face arrière un ou plusieurs orifices qui permettent cette communication). Dans ce qui suit, on suppose que la membrane est soumise à un déplacement périodique sinusoïdal, donné par :

$$x(t) = a \cos(2\pi Nt) \quad [2.221]$$

où a est l'amplitude (constante) du déplacement, N est la fréquence et $x(t)$ est la position de la membrane à la date t .

1) Donner l'expression des variations de la pression sur chacune des faces de la membrane en fonction du temps. On considérera que la vitesse du son c est constante.

2) En déduire l'expression de la puissance mécanique moyenne qu'il faut fournir à la membrane au cours d'une période. Montrer en particulier que la puissance varie comme le carré de la fréquence.

3) Application numérique : calculer les surpressions et les puissances pour les valeurs données dans le Tableau 2.3.

Symbole	Signification	Valeur
A	Surface de la membrane	0,2 cm ² (haut-parleur de téléphone) 700 cm ² (enceinte de sonorisation)
a	Amplitude du déplacement	0,1 mm (haut-parleur de téléphone) 5 mm (enceinte de sonorisation)
N	Fréquence du signal	20 Hz, 440 Hz, 2kHz, 16 kHz
p_0	Pression atmosphérique de l'air au repos	10 ⁵ Pa
γ	Constante polytropique des gaz parfaits	1,4
ρ_0	Masse volumique de l'air au repos	1,02 kg.m ⁻³

Tableau 2.3. Paramètres pour le problème 2.7.

2. Réponses

2.1. Question 1

La membrane impose son mouvement aux molécules d'air situées dans son voisinage immédiat. Par conséquent, au niveau de la membrane, la vitesse u est donnée par :

$$u(t) = 2\pi Na \cos(2\pi Nt) \quad [1]$$

Le côté gauche de la membrane peut être relié à l'état initial au repos par une caractéristique $dx/dt = c_0$ (Figure 1). De la même manière, le côté droit de la membrane peut être relié à l'état initial au repos par une caractéristique $dx/dt = -c_0$.

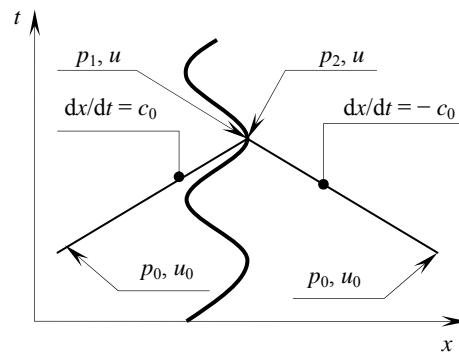


Figure 1. Schématisation d'une membrane de haut-parleur. Caractéristiques (traits fins) et position de la membrane (trait gras) dans l'espace des phases.

La pression p_1 du côté gauche et la pression p_2 du côté droit de la membrane obéissent respectivement à la troisième et à la première relation [2.205] :

$$\left. \begin{aligned} p_1 + \rho_0 c_0 u &= p_0 + \rho_0 c_0 u_0 \\ p_2 - \rho_0 c_0 u &= p_0 - \rho_0 c_0 u_0 \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

où $u_0 = 0$ est la vitesse de l'air au repos. La force F exercée par la membrane sur l'air est donnée par :

$$F = (p_2 - p_1)A = 2\rho_0 c_0 u = 4\pi N a \rho_0 c_0 \cos(2\pi N t) \quad [3]$$

2.2. Question 2

La puissance instantanée $P(t)$ est donnée par le produit Fu :

$$P(t) = 8\rho_0 c_0 A [\pi N a \cos(2\pi N t)]^2 \quad [4]$$

La puissance moyenne \bar{P} au cours d'un cycle est donc (noter que la valeur moyenne de la fonction \cos^2 est $1/2$) :

$$\bar{P} = 4\rho_0 c_0 A (\pi N a)^2 \quad [4]$$

Cette puissance est proportionnelle au carré de la fréquence et de l'amplitude du déplacement de la membrane.

2.3. Question 3

On notera pour cette application que la vitesse du son est donnée par [2.207] :

$$c_0 = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Configuration	Fréquence (Hz)	Force maximale (N)	Puissance moyenne (W)
Haut-parleur de téléphone	20	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
Haut-parleur de téléphone	440	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$
Haut-parleur de téléphone	2000	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$
Haut-parleur de téléphone	16000	$1,65 \cdot 10^{-1}$	$8,3 \cdot 10^{-1}$
Enceinte de sonorisation	20	7,2	$4,5 \cdot 10^{-1}$
Enceinte de sonorisation	440	$1,6 \cdot 10^2$	$2,2 \cdot 10^2$
Enceinte de sonorisation	2000	$7,2 \cdot 10^2$	$4,5 \cdot 10^3$
Enceinte de sonorisation	16000	$5,8 \cdot 10^3$	$2,9 \cdot 10^5$

Les valeurs consignées dans ce tableau ne sont bien sûr qu'indicatives. Dans la réalité, la forme des enceintes, le rendement non optimal des bobinages, etc., font que l'on ne retrouve pas exactement ces valeurs de puissance. Ceci explique néanmoins pourquoi le son des systèmes de sonorisation est souvent mauvais : à amplitude égale, produire une onde sonore à la limite d'audibilité humaine des basses fréquences (environ 20 Hz) demande 500 000 fois moins de puissance qu'une onde sonore à la limite d'audibilité des hautes fréquences (environ 16 kHz). La puissance des systèmes de sonorisation étant finie, les hautes fréquences seront moins bien reproduites que les basses fréquences. A ceci s'ajoute l'inertie des bobinages, etc., qui limite les accélérations de la membrane, donc la gamme des fréquences accessibles.

A noter que la fréquence de 440 Hz correspond au « La » de la tonalité du téléphone.