

## Mécanique des Fluides



### STE 3

Octobre 2019

Vincent Guinot, [vincent.guinot@umontpellier.fr](mailto:vincent.guinot@umontpellier.fr)

Samer Majdalani, [samer.majdalani@umontpellier.fr](mailto:samer.majdalani@umontpellier.fr)

Pascal Finaud-Guyot, [pascal.finaud-guyot@umontpellier.fr](mailto:pascal.finaud-guyot@umontpellier.fr)



Introduction. A quoi sert la matière Mécanique des Fluides ? .....	1
Objectifs généraux .....	1
Contenu.....	1
Chapitre 1. Notions de base.....	3
Objectifs du chapitre.....	3
1.1 Principes physiques de base .....	3
1.2 Opérateurs différentiels .....	4
1.4 Exercices.....	6
Chapitre 2. Statique des fluides .....	9
Objectifs du chapitre.....	9
2.1 Forces exercées sur un élément fluide statique.....	9
2.2 Principe d'Archimède.....	11
2.3 Force exercée par un fluide sur une surface.....	13
2.4 A retenir .....	16
2.5 Suggestions d'exercices.....	16
Chapitre 3. Ecoulement des fluides parfaits .....	25
Objectifs du chapitre.....	25
3.1 Définitions et outils mathématiques .....	25
3.2 Conservation de la masse (continuité).....	27
3.3 Conservation de la quantité de mouvement .....	31
3.4 Conservation de l'énergie.....	34
3.5 Applications .....	35
3.6 A retenir .....	36
3.7 Suggestions d'exercices.....	36
Chapitre 4. Ecoulement des fluides réels.....	41
Objectifs du chapitre.....	41
4.1 Contrainte.....	41
4.2 Equations de Navier-Stokes.....	43
4.3 Turbulence – Equations de Reynolds .....	44
4.4 Transport passif.....	46
4.5 Tension superficielle .....	48
4.6 A retenir .....	49
Annexe A. Constantes utiles.....	51
A.1 Masses volumiques .....	51
A.2 Viscosités .....	51
Annexe B. Aide-mémoire.....	52
Index .....	53



## Introduction

# A quoi sert la matière Mécanique des Fluides ?

La matière « Mécanique des fluides » a pour but principal de fournir les bases qui vous serviront à comprendre les matières liées à l'hydraulique (hydraulique générale, hydraulique souterraine et hydraulique à surface libre) que vous aborderez ultérieurement dans le cursus STE. Les objectifs et le contenu de cette matière sont détaillés ci-dessous.

Un objectif reflète un savoir-faire précis. Il énonce un certain nombre de tâches que l'étudiant doit savoir faire lorsqu'il (elle) a correctement assimilé la matière étudiée. Un objectif est *mesurable*, il peut donc être évalué directement au moyen d'un examen, d'un QCM, *etc.* Par exemple, « connaître les bases de la mécanique des fluides » n'est pas un énoncé d'objectif valable car il ne précise pas en quoi consistent « les bases de la mécanique des fluides ». En revanche, « savoir appliquer le théorème de Bernoulli à des écoulements en régime permanent » est un objectif correctement énoncé car on peut l'évaluer directement lors d'un examen.

Conséquence directe : *la liste des objectifs de la matière reflète exactement le type de problèmes que l'on vous posera en examen !* Pour savoir si vous aurez une note acceptable à la matière « mécanique des fluides », il vous suffit de vérifier que vous savez répondre correctement aux objectifs listés ci-dessous !

## Objectifs généraux

A la fin de la matière, l'étudiant doit pouvoir :

- 1) utiliser la loi de l'hydrostatique pour résoudre des problèmes simples : poussées et calculs de stabilité pour des ouvrages simples, des objets immergés – utiliser correctement les notions de force, de moment. Comprendre le fonctionnement de piézomètres simples ;
- 2) ne pas confondre trajectoire, ligne de courant et ligne d'émission ;
- 3) maîtriser la notion de bilan et les applications simples des théorèmes de Bernoulli et Euler : mesure des vitesses et des débits, vidange de réservoir, poussée sur des plaques, des coudes ;
- 4) résoudre des problèmes simples (type loi de Poiseuille ou viscosimètre de Couette) d'écoulement laminaire.

## Contenu

1. **Notions de base.** Principes fondamentaux de la statique et de la dynamique des solides – Opérateurs différentiels.
2. **Statique des fluides – Hydrostatique.** Fluide, milieu continu – Forces s'exerçant sur un élément fluide – Champ de pression – Equations de la statique des fluides et de l'hydrostatique – Applications à la mesure des pressions – Poussée sur une paroi plane (au passage, qq éléments sur la structure des barrages) – Poussée sur une surface sphérique – Poussée sur une surface gauche – formule du chaudronnier – Poussée d'Archimède – Notions d'équilibre stable et instable appliquées aux corps flottants.
3. **Ecoulement des fluides parfaits.** Descriptions eulérienne et lagrangienne – grandeurs intensives et extensives - lignes de courant, trajectoires, lignes d'émission – dérivée particulière – expressions locale et intégrale de la conservation de la masse – Ecoulement stationnaire : bilans de masse, de quantité de mouvement (Euler) et d'énergie (Bernoulli).
4. **Equation fondamentale de la dynamique des fluides réels.** Les contraintes, pression et tensions visqueuses – tenseur des tensions visqueuses- Equation de Navier-Stokes.
5. **Applications des théorèmes globaux.** Th. de Bernoulli : Toricelli – pression sur un obstacle dans un courant uniforme – tube de Pitot – tube de Prandtl – Venturi.  
Th. d'Euler : poussées sur une plaque plane, une plaque sphérique, un coude de conduite.



# Chapitre 1

## Notions de base

### Objectifs du chapitre

A la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir :

- 1) effectuer le bilan des forces et des moments des forces appliquées à un objet ou un système (ensemble d'objets)
- 2) utiliser le principe fondamental de la statique pour en déduire une force inconnue dans un système et son point d'application
- 3) appliquer le théorème fondamental de la dynamique pour calculer des accélérations, des vitesses et des positions de systèmes soumis à des forces ;
- 4) faire tous les exercices en fin de chapitre.

### 1.1 Principes physiques de base

#### 1.1.1 Définitions

**Système.** Un système est un ensemble d'objets (un objet solide, plusieurs objets solides solidaires ou libres de se déplacer les uns par rapport aux autres, les molécules d'un fluide, etc.)

**Forces externes/internes.** Lorsqu'un système est composé de plusieurs objets, les forces qui s'exercent sur ces objets sont de deux types :

- les forces internes ; ce sont les forces exercées par les objets du système sur les autres objets du système ;
- les forces externes (ou extérieures) ; ce sont les forces exercées sur les objets du système par des objets n'appartenant pas au système.

**Quantité de mouvement.** Un objet de masse  $m$  avec une vitesse  $\vec{u}$  possède une quantité de mouvement  $m\vec{u}$ .

**Moment d'une force.** Une force  $\vec{F}$  est appliquée au point P. Le moment de cette force par rapport au point O est défini comme le produit de la force et de la distance projetée. On peut définir ce moment à l'aide du produit vectoriel :

$$\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F} \quad (1.1)$$

#### 1.1.2 Principe de l'action et de la réaction (ou des actions réciproques)

Soit  $\vec{F}$  la force exercée par un système A sur un système B. Alors la réaction de B sur A est égale à  $-\vec{F}$ .

#### 1.1.3 Principe fondamental de la statique

Ce principe est en deux parties (on oublie en général la 2<sup>ème</sup>) :

- la somme des forces extérieures exercées sur un système en équilibre statique est nulle ;
- la somme des moments des forces extérieures exercées sur un système en équilibre statique est nulle.

#### 1.1.4 Principe fondamental de la dynamique

Soit un système soumis à l'action de plusieurs forces. La somme des forces extérieures appliquées au système est notée  $\vec{F}$ . La masse du système est notée  $m$ , sa vitesse est notée  $\vec{u}$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{mu}) = \overrightarrow{F} \quad (1.2)$$

Pour un système dont la masse est constante, (1.2) se simplifie en :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} \quad (1.3)$$

Attention, (1.6) n'est valable que pour un système de masse constante !

## 1.2 Opérateurs différentiels

Pour les définitions et les expressions dans les différents systèmes de coordonnées : voir le chapitre 5 (sections 5.2 à 5.6) de l'*Aide-mémoire de Mathématiques et Mécanique de base* qui vous a été distribué en début d'année.

### 1.2.1 Opérateur « Nabla »

L'opérateur « Nabla » (symbole  $\overrightarrow{\nabla}$ ) est défini par

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Gradient

**Définition générale.** Quand on se déplace dans l'espace d'un vecteur déplacement infinitésimal  $\overrightarrow{dM}$ , la fonction  $f$  varie d'une quantité infinitésimale  $df$  (Figure 1.1). Le gradient de la fonction  $f$  (noté  $\overrightarrow{\text{Grad}} f$  ou  $\overrightarrow{\nabla} f$ ) vérifie l'égalité

$$df = \overrightarrow{\text{Grad}} f \cdot \overrightarrow{dM} \quad (1.5)$$

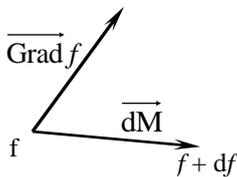


Figure 1.1. Schéma de principe pour la définition du gradient.

**Propriété importante.** Le gradient de  $f$  est orthogonal aux lignes d'isovaleur de  $f$ .

**Expression dans les différents systèmes de coordonnées.**

$$\overrightarrow{\text{Grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e}_z \quad (\text{cartésiennes}) \quad (1.6a)$$

$$\overrightarrow{\text{Grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \overrightarrow{e}_z \quad (\text{cylindriques/polaires}) \quad (1.6b)$$

### 1.2.3 Divergence

**Définition générale.** La divergence vérifie le théorème de Green–Ostrogradski. Soit un volume  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Le vecteur normal sortant de  $\Gamma$  est noté  $\vec{n}$  (Figure 1.2).

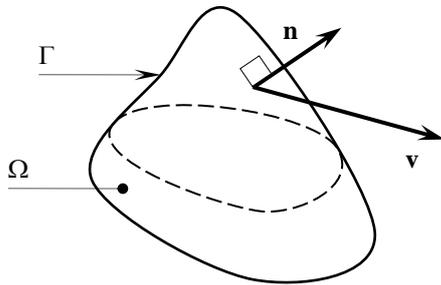


Figure 1.2. Schéma de définition pour la divergence.

La divergence du champ vecteur  $\vec{v}$  (notée  $\text{Div } \vec{v}$  ou  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ) vérifie :

$$\int_{\Omega} \text{Div } \vec{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (1.7)$$

**Expression dans les différents systèmes de coordonnées.**

$$\text{Div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{coordonnées cartésiennes}) \quad (1.8a)$$

$$\text{Div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{cylindriques/polaires}) \quad (1.8b)$$

### 1.6.4 Rotationnel

**Définition générale.** On considère dans l'espace une portion de surface plane  $\Omega$  de frontière (contour)  $\Gamma$  (Figure 1.3). Le vecteur unitaire normal de  $\Omega$  est noté  $\vec{n}$ , le vecteur unitaire tangent de  $\Gamma$  est noté  $\vec{s}$  (orienté tel que le sens de parcours de  $\Gamma$  soit positif quand on regarde depuis le côté vers lequel  $\vec{n}$  pointe).

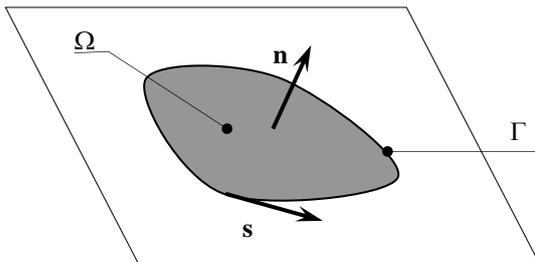


Figure 1.3. Schéma de définition pour le rotationnel.

Le rotationnel d'un champ vecteur  $\vec{v}$  (noté  $\vec{\text{Rot}} \vec{v}$  ou  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ ) vérifie :

$$\int_{\Omega} (\vec{\text{Rot}} \vec{v}) \cdot \vec{n} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{s} \, d\Gamma \quad (1.9)$$

**Expression dans les différents systèmes de coordonnées.**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x \\ &+ \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad \text{(coordonnées cartésiennes)} \quad (1.10a)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{v} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left[ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad \text{(cylindriques/polaires)} \quad (1.10b)$$

### 1.3.5 Laplacien

**Laplacien scalaire.** Le Laplacien d'une fonction scalaire  $f$  de l'espace est la divergence du gradient de cette fonction :

$$\Delta f = \text{Div}(\overrightarrow{\text{Grad}} f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) \quad (1.11)$$

**Laplacien vecteur.** Le Laplacien d'un champ vecteur  $\vec{v}$  est donné par

$$\Delta \vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

**Expression dans les différents systèmes de coordonnées.**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{(coordonnées cartésiennes)} \quad (1.13a)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{(cylindriques/polaires)} \quad (1.13b)$$

## 1.4 Exercices

**Exercice 1.1.** Une planche est soutenue à ses deux extrémités par des briques (Figure 1.4). La distance entre ces briques est notée  $L$ . On pose un parpaing de poids  $P$  sur la planche, à une distance  $l$  de la brique de gauche. La masse de la planche est négligeable par rapport à celle du parpaing. Déterminer les forces de réaction des deux briques qui supportent l'ensemble (planche + parpaing).

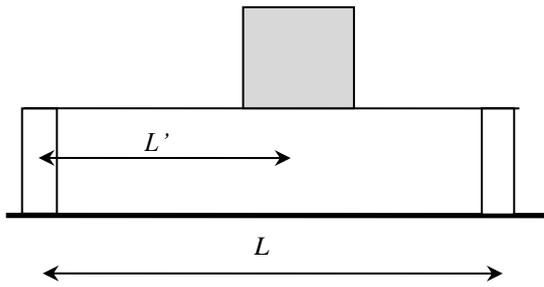


Figure 1.4. Schéma de définition de l'exercice 1.1.

**Exercice 1.2.** La balance romaine est constituée de deux bras (appelés fléaux) de longueurs différentes (Figure 1.5). La pesée s'effectue en déplaçant une masse  $m$  connue le long du fléau le plus long. On peut en déduire la masse  $M$  à peser en fonction de  $m$ , AC et DC.

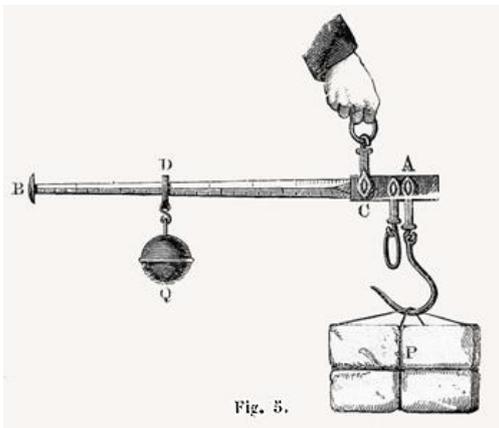


Figure 1.5. Principe de la balance romaine.

**Exercice 1.3.** Pour qu'une porte soit facile à ouvrir, vaut-il mieux placer la poignée le plus près possible des gonds, ou au contraire le plus loin possible ? Justifier votre réponse.



## Chapitre 2

# Statique des fluides

### Objectifs du chapitre

A la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir :

- 1) donner la définition de la pression locale (manométrique), de la pression motrice (pression étoilée), de la hauteur manométrique et de la cote piézométrique ;
- 2) déterminer le champ de pression dans un fluide en équilibre statique ;
- 3) déterminer les efforts exercés par un fluide au repos sur des obstacles dont la géométrie est connue (barrages, digues, écluses, *etc.*) ;
- 4) déterminer si un corps flottant est en équilibre stable ou instable ;
- 5) faire tous les exercices en fin de chapitre.

## 2.1 Forces exercées sur un élément fluide statique

### 2.1.1 Forces de pression

**L'origine de la pression.** La pression au sein d'un fluide vient de ce que les molécules sont en mouvement constant dans toutes les directions possibles de l'espace. Ce mouvement est appelé le « mouvement Brownien ».

Au voisinage immédiat d'une paroi imperméable, les molécules dont le vecteur vitesse est orienté vers la paroi vont nécessairement heurter celle-ci et « rebondir » vers l'intérieur du fluide (Figure 2.1).

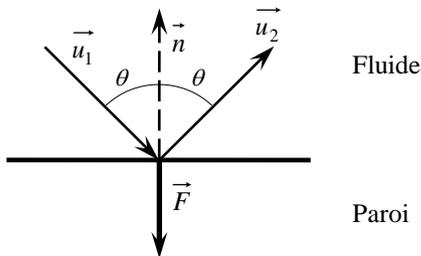


Figure 2.1. Molécule de gaz heurtant une paroi.

En rebondissant, une molécule de masse  $m$  voit sa quantité de mouvement modifiée d'une quantité :

$$\Delta \vec{q} = m(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \quad (2.1)$$

Si l'on fait l'hypothèse d'un rebond élastique, le vecteur  $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$  est colinéaire au vecteur normal  $\vec{n}$  à la paroi, orienté vers l'intérieur du fluide. Il peut donc se mettre sous la forme :

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \Delta u \vec{n} \quad (2.2)$$

où  $\Delta u$  est une quantité positive. En notant  $\Delta t$  la durée pendant laquelle le rebond est effectué, on a, par application du principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = m \frac{\Delta u}{\Delta t} \vec{n} \quad (2.3)$$

où  $\vec{F}$  est la force moyenne exercée sur la molécule pendant la durée  $\Delta t$  du rebond pour la faire changer de direction. La force  $\vec{F}$  exercée par la paroi contre la molécule est orientée de la paroi vers le fluide. En vertu du principe de l'action et de la réaction, la molécule exerce contre la paroi une force égale et opposée.

La force de pression est la force totale égale à la somme de toutes les forces exercées lors des rebonds contre la paroi de toutes les molécules se déplaçant avec toutes les vitesses possibles.

A noter que la pression est fonction du nombre de molécules qui viennent frapper la paroi, ainsi que de leur vitesse. Le nombre de molécules est lié à la masse volumique du fluide, la vitesse des molécules est liée à l'agitation thermique, donc à la température. Par conséquent :

- à température constante, augmenter la masse volumique d'un fluide fait augmenter la pression ;
- à masse volumique constante, augmenter la température d'un fluide fait également augmenter la pression.

Ceci explique la loi des gaz parfaits.

### Force de pression

- La force de pression  $\vec{dF}$  exercée par un fluide à la pression  $p$  sur une surface infinitésimale  $dA$  est donnée par

$$\vec{dF} = -p \, dA \, \vec{n} \quad (2.4)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la paroi, orienté de la paroi vers l'intérieur du fluide.

- La force de pression  $\vec{F}$  exercée par un fluide à la pression  $p$  sur une surface  $\Gamma$  quelconque est donnée par l'intégrale des forces de pression élémentaires (2.4) :

$$\vec{F} = \int_{\Gamma} -p \, \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.5)$$

*Attention* : dans (2.5), il est tout à fait possible que  $p$  et  $\vec{n}$  soient variables sur  $\Gamma$ . Dans ce cas, il n'est pas toujours facile d'intégrer (2.5) analytiquement.

**Unité.** La pression est homogène à une force par unité de surface :

$$[p] = \text{M.L.T}^{-2} \text{L}^{-2} = \text{M.L}^{-1}.\text{T}^{-2} \quad (2.6)$$

L'unité de pression est le Pascal (Pa), c'est-à-dire le  $\text{N.m}^{-2}$ . On utilise également le bar :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

La pression atmosphérique standard au niveau de la mer est de 1,013 bar.

**Fluide barotrope, compressibilité.** Un fluide barotrope est un fluide dont la masse volumique dépend de la pression. La compressibilité  $k$  d'un tel fluide est définie comme :

$$k = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.7)$$

où  $p$  est la pression et  $\rho$  est la masse volumique.

**Fluide incompressible.** Un fluide incompressible est un fluide dont la masse volumique est constante. L'hypothèse d'incompressibilité peut d'ordinaire être faite pour les liquides dans des gammes raisonnables de pression, ainsi que pour les gaz lorsque les vitesses d'écoulement sont relativement faibles.

### 2.1.2 Forces volumiques

Les forces volumiques sont par définition des forces qui agissent sur le fluide par unité de volume. De telles forces sont typiquement :

- la force de gravitation,
- la force centrifuge (quand on se place dans un repère tournant),
- la force de Coriolis (qui vient s'ajouter à la force centrifuge quand le fluide est en mouvement dans un repère tournant).

Une force volumique  $\vec{f}$  exercée sur un volume élémentaire  $dV$  de fluide donne lieu à une force élémentaire  $\vec{dF}$

$$\vec{dF} = \vec{f} \, dV \quad (2.8)$$

La force volumique totale exercée sur un domaine fluide  $\Omega$  est donnée par l'intégrale des forces élémentaires (2.8)

$$\vec{F} = \int_{\Omega} d\vec{F} = \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Statique

Dans un fluide au repos, l'accélération est nulle. En vertu du principe fondamental de la dynamique, la somme des forces (volumiques et surfaciques) exercées sur n'importe quel domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  au sein de ce fluide est nulle. Ceci est vrai quelle que soit la forme du domaine  $\Omega$ .

D'après (2.5) et (2.9), on a :

$$\int_{\Omega} \vec{f} d\Omega = \int_{\Gamma} p \vec{n} d\Gamma \quad (2.10)$$

où le vecteur  $\vec{n}$  est le vecteur normal orienté vers l'extérieur du domaine.

## 2.2 Principe d'Archimède

### 2.2.1 Le principe

**Énoncé.** Le principe (ou théorème) d'Archimède s'énonce de la façon suivante :

*Tout corps au repos dans un fluide subit, de la part de ce fluide, une poussée, exercée en son centre de gravité, opposée au poids du volume de fluide déplacé.*

A noter trois points importants :

- la poussée est orientée dans le sens opposé au poids du corps ; elle a donc tendance à le faire flotter ;
- elle est égale en norme au poids du fluide déplacé. On peut donc la chiffrer si l'on connaît le volume du fluide déplacé ;
- la poussée passe par le centre de gravité du volume de fluide déplacé. Ceci permet de faire des calculs de stabilité d'équilibre de corps flottants.

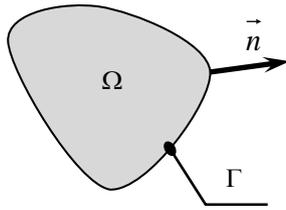
**Démonstration.** Supposons que l'on remplace le corps plongé dans le fluide par un domaine de même forme  $\Omega$ , mais ne contenant que du fluide, de même masse volumique et à la même pression que le fluide environnant. Alors :

- pour le fluide environnant, les conditions sont exactement les mêmes et l'équilibre statique est respecté. Le corps  $\Omega$  et le domaine de même forme contenant le fluide exercent exactement la même force sur le fluide environnant. Cette force s'exerce sur la frontière  $\Gamma$  du corps  $\Omega$  ;
- d'après le principe de l'action et de la réaction, le fluide environnant exerce sur la frontière  $\Gamma$  la même force, quelle que soit la nature de la matière présente dans le domaine  $\Omega$ . Cette force est donc en particulier la même que celle qui serait exercée sur le domaine si celui-ci était rempli de fluide au lieu d'être rempli par le matériau du corps plongé dans le liquide ;
- le domaine  $\Omega$  est soumis à deux forces : la résultante des forces (surfaciques) de pression, et son poids, qui est égal au poids du fluide déplacé par le domaine  $\Omega$  ;
- d'après le principe fondamental de la dynamique, la somme des forces est nulle. Les forces surfaciques (ici, de pression) exercées par le fluide environnant sur le domaine  $\Omega$  sont donc opposées au poids du fluide déplacé.

### 2.2.2 Champ de pression hydrostatique

**Définition.** Un champ de pression est dit hydrostatique s'il est identique à celui que l'on trouverait dans un fluide au repos dans le champ de pesanteur terrestre.

**Expression vérifiée par la pression hydrostatique.** On considère un fluide au repos. Dans ce fluide, on isole un domaine  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$  (Figure 2.2).



**Figure 2.2.** Volume élémentaire pour la formulation du champ de pression hydrostatique.

Le fluide à l'intérieur de étant au repos par hypothèse, on a le droit d'écrire que la somme des forces extérieures s'appliquant sur  $\Omega$  est nulle :

$$\vec{P} + \vec{F}_p = \vec{0} \quad (2.11)$$

où  $\vec{F}_p$  et  $\vec{P}$  sont, respectivement, la force de pression exercée sur  $\Omega$  par le fluide extérieur et le poids du fluide contenu dans  $\Omega$ . Pour le poids, on a :

$$\vec{P} = \int_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega \quad (2.12)$$

Pour exprimer la force de pression, on définit le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  à  $\Gamma$ , orienté vers l'extérieur de  $\Omega$ . Le fluide extérieur exerce sa pression vers l'intérieur de  $\Omega$ , donc dans le sens opposé à  $\vec{n}$  :

$$\vec{F}_p = - \int_{\Gamma} p \vec{n} d\Gamma \quad (2.13)$$

En substituant (2.12-13) dans (2.11), on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega = \int_{\Gamma} p \vec{n} d\Gamma \quad (2.14)$$

On peut convertir l'intégrale sur  $\Gamma$  en une intégrale sur  $\Omega$ , en utilisant le théorème du gradient :

$$\int_{\Gamma} p \vec{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{Grad} p} d\Omega \quad (2.15)$$

En substituant (2.15) dans (2.14), on obtient :

$$\int_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega = \int_{\Omega} \overrightarrow{\text{Grad} p} d\Omega \quad (2.16)$$

Comme (2.16) est vraie quelles que soient la taille et la forme du domaine  $\Omega$ , nécessairement :

$$\overrightarrow{\text{Grad} p} = \rho \vec{g} \quad (2.17)$$

Autrement dit, si l'on oriente l'axe des  $z$  vers le haut :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.18)$$

**Cas particulier.** Si le fluide est incompressible et si l'accélération de la pesanteur est constante, on a :

$$p(z) = p(z_0) + (z - z_0) \rho g \quad (2.19)$$

ou encore :

$$p + \rho g z = \text{Cste} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Pression motrice et piézométrie

**Définitions.** Les grandeurs suivantes sont classiquement utilisées :

- la pression manométrique, ou pression locale : c'est la pression  $p$  ;
- la hauteur manométrique : c'est la pression divisée par le poids spécifique  $\rho g$  :

$$h_m = \frac{p}{\rho g} \quad (2.21)$$

– la pression motrice, aussi dite pression étoilée :

$$p^* = p + \rho g z \quad (2.22)$$

– la cote piézométrique : c'est la pression motrice divisée par le poids spécifique  $\rho g$  :

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (2.23)$$

**Propriétés.** Dans un champ de pression hydrostatique, la pression motrice et la piézométrie sont constantes.

### 2.2.4 Applications : baromètres, manomètres

**Baromètre.** On immerge un tube fermé à une extrémité dans une cuvette remplie de liquide (eau, mercure, etc.). On retourne le tube, extrémité fermée en haut (Figure 2.3). On a alors

$$p = \rho g \Delta z + p_{\text{sat}} \quad (2.24)$$

où  $\Delta z$  est la différence de cote entre le liquide dans le tube et la cuvette et  $p_{\text{sat}}$  est la pression de vapeur saturante du liquide.

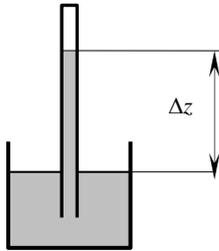


Figure 2.3. Principe du baromètre.

*N.B.* : La portion du tube au-dessus de la surface libre n'est pas réellement vide, mais contient le liquide qui s'est vaporisé à sa pression de vapeur.

**Manomètre différentiel.** Entre deux conduites, ou deux points d'une conduite où l'on désire connaître la pression, on implante un tube en U. Le fond du tube est rempli d'un liquide de masse volumique connue (Figure 2.4). La différence de pression entre les deux piquages est donnée par

$$\Delta p = \rho g \Delta z \quad (2.25)$$

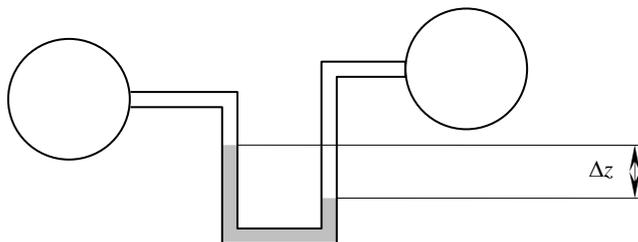


Figure 2.4. Manomètre différentiel.

## 2.3 Force exercée par un fluide sur une surface

### 2.3.1 Triangle de pression pour un liquide à surface libre

Dans cette section, on considère un liquide au repos avec une surface libre, c'est-à-dire que la surface du liquide est à la pression atmosphérique (Figure 2.5). On a alors, d'après (2.19) :

$$p(z) - p_{\text{atm}} = (\zeta - z) \rho g \quad (2.26)$$

où  $\zeta$  est la cote de la surface libre.

On représente sur la Figure 2.5 la quantité  $(p - p_{\text{atm}})$  en fonction de la cote  $z$ . La pression est représentée en abscisse. D'après l'équation (2.25), la quantité  $(p - p_{\text{atm}})$  est nulle à la surface et croît linéairement à mesure que l'on descend sous la surface. La surface comprise entre l'axe des  $z$  et la courbe  $(p - p_{\text{atm}})(z)$  est donc un triangle. On appelle cette surface le *triangle de pression*.

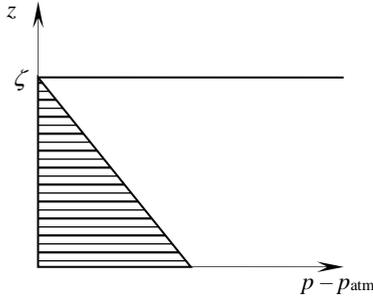


Figure 2.5. Le triangle de pression.

### 2.3.2 Force de pression sur une surface

**Formule générale.** Soit une surface  $\Gamma$  dans l'espace  $(x, y, z)$ . Si l'on connaît la forme de la surface, on est capable de déterminer en tout point son vecteur normal  $\vec{n}$  (orienté de la paroi vers le fluide). La force exercée par un champ de pression hydrostatique sur cette paroi est donnée par :

$$\vec{F} = - \int_{\Gamma} p(z) \vec{n} d\Gamma \quad (2.27)$$

Cette force peut être décomposée en deux parties : une composante horizontale et une composante verticale. On réécrit (2.27) sous la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_z \quad (2.28)$$

où  $\vec{F}_h$  est la composante horizontale de la force et  $\vec{F}_z$  est sa composante verticale. On détermine leurs expressions en décomposant l'intégrale dans (2.27) :

$$\int_{\Gamma} p(z) \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} p(z) \vec{n}_h d\Gamma - \int_{\Gamma} p(z) \vec{n}_z d\Gamma \quad (2.29)$$

où  $\vec{n}_h$  et  $\vec{n}_z$  sont les composantes du vecteur  $\vec{n}$  dans les plans horizontal et vertical respectivement. En comparant (2.28) et (2.29), on obtient :

$$\vec{F}_h = - \int_{\Gamma} p(z) \vec{n}_h d\Gamma \quad (2.30a)$$

$$\vec{F}_z = - \int_{\Gamma} p(z) \vec{n}_z d\Gamma \quad (2.30b)$$

**Centre de poussée.** Le centre de poussée est le point auquel on peut « regrouper » la résultante des forces de pression sur une surface. C'est le barycentre des forces de poussée. Il représente l'analogie du centre de gravité pour le poids d'un corps. Ses coordonnées sont données par

$$x_F = \frac{\int_{\Gamma} p x n_x d\Gamma}{\int_{\Gamma} p n_x d\Gamma}, y_F = \frac{\int_{\Gamma} p y n_y d\Gamma}{\int_{\Gamma} p n_y d\Gamma}, z_F = \frac{\int_{\Gamma} p z n_z d\Gamma}{\int_{\Gamma} p n_z d\Gamma} \quad (2.31a)$$

$$x_F = \frac{\int_{\Gamma_x} p x d\Gamma_x}{\int_{\Gamma_x} p n_x d\Gamma_x}, y_F = \frac{\int_{\Gamma_y} p y d\Gamma_y}{\int_{\Gamma_y} p d\Gamma_y}, z_F = \frac{\int_{\Gamma_z} p z d\Gamma_z}{\int_{\Gamma_z} p d\Gamma_z} \quad (2.31b)$$

Les deux formules (2.31a) et (2.31b) sont équivalentes.  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$  et  $\Gamma_z$  sont les projections de  $\Gamma$  parallèlement aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

On vérifie par exemple que pour une plaque plane de largeur constante soumise à la poussée d'un liquide le centre de poussée est situé aux deux tiers de la hauteur de la plaque en partant de la surface libre (voir le 2.3.3 pour une démonstration sur le barrage).

### 2.3.3 Application : stabilité d'ouvrages

**Généralités.** On s'intéresse à la stabilité d'ouvrages tels que les barrages. On considère un barrage ancré au fond d'un cours d'eau (Figure 2.8). Le barrage est maintenu en place par son propre poids, qui entraîne une résistance de la part du fond sur lequel il est ancré. Les forces agissant sur le système « barrage » sont :

- le poids  $\vec{P}$  du barrage, appliqué au niveau du centre de gravité G ;
- la force de pression  $\vec{F}$  de l'eau à l'amont du barrage (sur le segment [AE]), appliquée au centre de poussée, dont on va déterminer la position ;
- la somme de la sous-pression  $\vec{S}$  le long du segment [AB] et de la réaction  $\vec{R}$  de la fondation ;
- la force de pression atmosphérique sur la ligne [BCDE]. Dans la suite des calculs, on l'éliminera en comptant toutes les pressions par rapport à la pression atmosphérique.

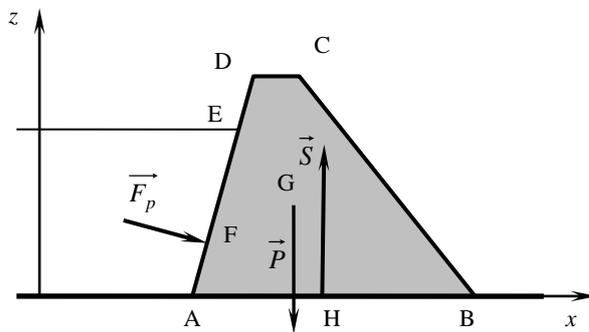


Figure 2.8. Vue d'un barrage-poids en coupe longitudinale.

L'équilibre statique implique :

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_p + \vec{P} + \vec{R} + \vec{S} &= \vec{0} \\ \vec{M}_{F_p} + \vec{M}_P + \vec{M}_R + \vec{M}_S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

où  $M$  représente le moment de la force considérée.

**Stabilité au soulèvement.** La première condition de stabilité est que le barrage ne se soulève pas sous l'effet de la sous-pression qui lui est appliquée. Lorsque le barrage se soulève, la réaction du sol devient nulle. La condition de non-soulèvement est donc

$$S - P - F_{p,z} = 0 \Leftrightarrow S = P + F_{p,z} \quad (2.33)$$

Où  $F_{p,z}$  est la projection sur  $z$  de la force de pression sur la face amont. On utilise en général un coefficient de sécurité  $\beta > 1$  pour être sûr que le barrage ne se soulèvera pas :

$$P + F_{p,z} \geq \beta S \quad (2.34)$$

**Basculement du barrage.** Le poids  $\vec{P}$  du barrage a tendance à le stabiliser. En revanche, si l'angle  $\theta$  est faible, la force de pression  $\vec{F}_p$  a tendance à le renverser en le faisant basculer autour du point B. Quant à la sous-pression  $\vec{S}$ , elle a également tendance à faire basculer le barrage autour de B. Les seules forces dont les moments en B sont non nuls sont :

- la force de poussée, dont le moment en B contribue au *moment renversant*,
- le poids, dont le moment en B est le *moment stabilisant*,
- la sous-pression, qui tend à soulever le barrage et contribue au *moment renversant*.

Au moment du basculement, la réaction du sol a un moment nul. En effet, si le barrage bascule, il ne peut le faire qu'en pivotant sur le point B, qui est le seul point de contact du barrage avec le sol. Le barrage ne basculera effectivement que si le moment renversant est supérieur en valeur absolue au moment stabilisant.

## 2.4 A retenir

### 2.4.1 Les grandes lignes

Un champ de pression hydrostatique est le champ de pression que l'on observe dans un fluide en équilibre hydrostatique (= au repos).

La formule générale du champ de pression hydrostatique est donnée par (2.17), ou (2.18), au choix.

Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, le champ de pression hydrostatique est donné par (2.19) ou (2.20), au choix. La pression motrice (ou la cote piézométrique) est alors la même en tout point du fluide.

### 2.4.2 A savoir absolument

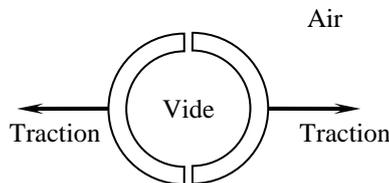
- le principe d'Archimède ;
- l'unité du Pascal, du bar et leur dimensionnalité (en unités SI) ;
- les formules générales (2.17) et (2.18) ;
- les cas particuliers (2.19) et (2.20) ;
- les définitions de la pression motrice, de la piézométrie, *etc.* du 2.2.3.

## 2.5 Suggestions d'exercices

**Exercice 2.1.** On place un glaçon dans un verre d'eau. le glaçon flotte. On repère le niveau du liquide dans le verre.

- a. Après que le glaçon a fondu, quel est le niveau de l'eau dans le verre (identique, plus haut ou plus bas que le repère) ?
- b. Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un clou ; le clou est suffisamment léger pour que le glaçon flotte.
- c. Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un bouchon en liège (qui flotte lorsque la glace a fondu).
- d. Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un bout de métal, qui est trop lourd pour que le glaçon flotte.

**Exercice 2.2. Sphère de Magdebourg.** En 1657, Otto von Guericke réalisa l'expérience suivante, destinée à prouver l'existence d'une pression atmosphérique. Après avoir assemblé deux hémisphères en métal, il en pompa l'air par un robinet (Figure 2.10).



**Figure 2.10.** Principe des hémisphères de Magdebourg.

L'histoire dit qu'il fallut 16 chevaux pour arriver à séparer les deux hémisphères (*cf.* Figure 2.11).

Sachant que le diamètre des hémisphères était de 30 cm environ, quelle est la force que les chevaux ont dû vaincre ?



Figure 2.11. Gravure de Gaspar Schott, *Mechanica Hydraulico-Pneumatica*, Würzburg, 1657.

**Exercice 2.3.** Une écluse est fermée par deux portes de largeur  $L$  chacune. Les cotes de la surface libre à l'amont et à l'aval de l'écluse sont respectivement notées  $h_1$  et  $h_2$  (Figure 2.12).

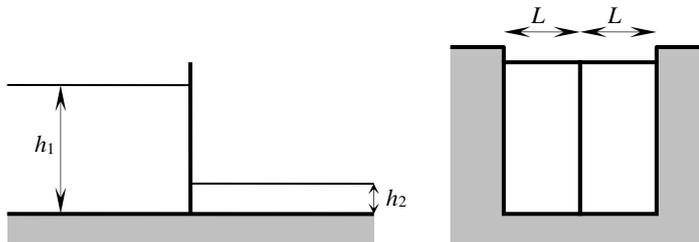


Figure 2.12. Ecluse dans un canal.

- Exprimer la force et le moment sur chacune des portes en fonction de  $h_1$  et  $h_2$ , de la masse volumique  $\rho$  de l'eau et de l'accélération  $g$  de la pesanteur. Convertir la force en masse équivalente (en divisant par  $g$ ).
- Faire l'application numérique pour les valeurs suivantes :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $h_1 = 4 \text{ m}$ ,  $h_2 = 2 \text{ m}$ ,  $L = 3.5 \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Exercice 2.4.** Un barrage voûte est placé dans une vallée dont les berges font un angle  $\theta$  avec la verticale (Figure 2.13). Le barrage peut être schématisé comme une plaque plane triangulaire.

Exprimer la poussée exercée sur le barrage en fonction de la hauteur  $h$  de l'eau en amont de ce dernier.

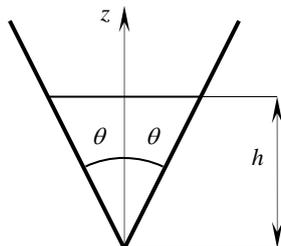


Figure 2.13. Représentation schématique d'un barrage voûte.

**Exercice 2.5.** Baromètre à boule (Figure 2.14). On fixe à chacun des bras d'une balance deux boules non déformables de même masse, mais de diamètres différents (la plus grosse des deux boules est creuse). On effectue le tarage de façon à ce que les deux bras de la balance soient exactement en équilibre.

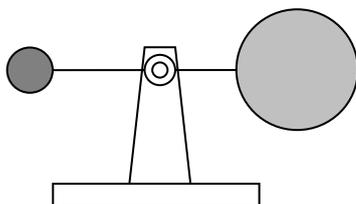


Figure 2.14. Schéma d'un baromètre à boule.

La pression atmosphérique se met à baisser (donc la masse volumique de l'air également). Les bras de la balance restent-ils en équilibre ? Si non, de quel côté la balance penche-t-elle ?

**Exercice 2.6.** On place une demi-sphère en métal au fond d'un bassin (la sphère ne flotte pas). La hauteur d'eau est plus importante que celle de la demi-sphère (Figure 2.15). Donner l'expression de la force de pression s'exerçant sur la sphère.

Une indication : il existe deux façons de répondre à la question : une où l'on ne réfléchit pas mais où les développements mathématiques sont lourds ; une autre très courte mais réclamant un peu d'astuce.

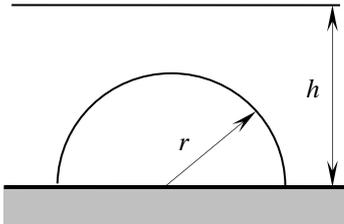


Figure 2.15. Hémisphère en métal au fond d'un bassin.

**Exercice 2.7.** Une vanne plane ferme une prise d'eau (Figure 2.16). La paroi de la vanne fait un angle  $\theta$  avec l'horizontale.

- Donner l'expression de la force exercée sur cette vanne en fonction de sa géométrie, de la masse volumique  $\rho$  de l'eau, de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de la hauteur d'eau  $h$  derrière la vanne.
- Faire l'application numérique pour  $h = 0,5$  m,  $\theta = \pi/4$ . La largeur de la vanne est  $L = 5$  m,  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup>,  $\rho = 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>.

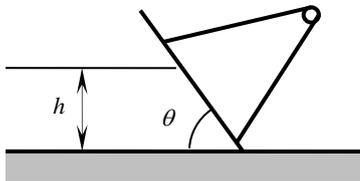


Figure 2.16. Vanne à secteur circulaire.

**Exercice 2.8.** Un obstacle en forme de triangle rectangle isocèle (ABC) pouvant tourner autour de B est maintenu en équilibre par l'eau poussant sur le côté [ABC] (Figure 2.17). On considère le cas le plus défavorable, c'est-à-dire  $h = BC$ . L'hypoténuse [AC] est verticale. L'obstacle tien en équilibre par l'action de son seul poids.

- Donner l'expression de la force s'exerçant par unité de largeur sur cet obstacle (composantes horizontale et verticale). Donner la masse volumique que doit avoir l'obstacle pour que l'équilibre soit respecté.
- Faire l'application numérique pour  $AB = 1$  m. On prendra  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup> et  $\rho = 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>.

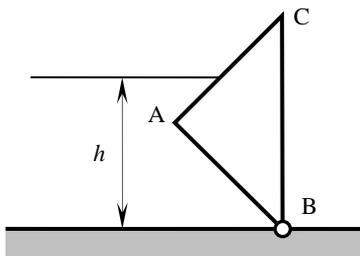


Figure 2.17. Equilibre d'un obstacle triangulaire.

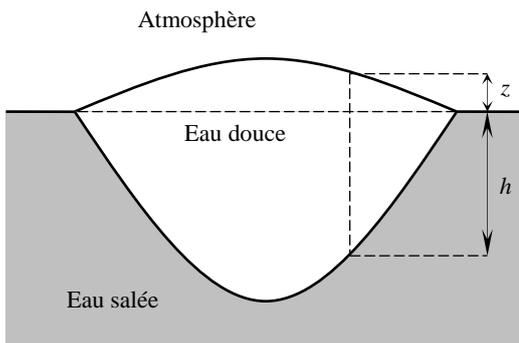
**Exercice 2.9.** Le chroniqueur romain Vitruve rapporte qu'Archimède aida le roi de Syracuse à prouver l'escroquerie d'un bijoutier. Le roi soupçonnait le bijoutier de n'avoir pas réalisé sa couronne en or

massif, mais en alliage d'or et d'argent. Archimède pesa la couronne dans l'air et obtint un poids correspondant à 1040 g. Il la pesa ensuite dans l'eau et obtint un poids apparent équivalent à 973 g.

Quel était le pourcentage d'or et d'argent contenu dans la couronne ?

$\rho_{Au} = 19300 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_{Ag} = 10500 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . On négligera la masse volumique de l'air.

**Exercice 2.10.** Dans les régions côtières et dans les îles, l'eau douce qui recharge les nappes souterraines et les cours d'eau flotte sur l'eau salée, plus dense, en formant des lentilles (Figure 2.18). En supposant que la répartition de pression est hydrostatique, calculer la profondeur  $h$  à laquelle la lentille s'enfonce au-dessous du niveau de la mer en fonction de l'élévation  $z$  de sa surface au-dessus du niveau de la mer et de la concentration  $s$  en sel de l'eau de mer. Faire l'application numérique pour la salinité standard de  $30 \text{ g.l}^{-1}$ .

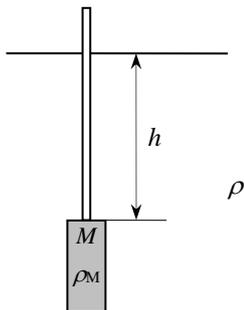


**Figure 2.18.** Lentille d'eau douce flottant sur de l'eau salée (l'échelle verticale est exagérée).

**Exercice 2.11.** Un aréomètre sert à mesurer la masse volumique d'un liquide ; on l'utilise notamment pour déterminer le titrage des liquides alcoolisés. Il est formé d'un tube en verre de section  $S$  dans lequel on a fait le vide. On attache à l'extrémité inférieure de ce tube une masse  $M$  de métal (appelée lest), de masse volumique  $\rho_M$ , telle que l'ensemble (tube + masse) plongé dans le liquide flotte (Figure 2.19).  $M$  et  $\rho_M$  sont connues.

L'aréomètre est calibré en l'immergeant dans un liquide de masse volumique  $\rho_0$  connue ; on note alors la hauteur  $h_0$  d'immersion. Si le liquide est moins dense, l'aéromètre descend ; si le liquide est plus dense, l'aéromètre monte.

Exprimer la masse volumique  $\rho$  du liquide en fonction de  $\rho_0$ ,  $h_0$ , de la hauteur  $h$  dont le tube est immergé, de la section  $S$  du tube, de la masse  $M$  et de la masse volumique  $\rho_M$  du lest (on supposera que la masse du tube de verre est négligeable).



**Figure 2.19** Schéma de principe d'un aréomètre.

**Exercice 2.12.** La masse volumique dans l'atmosphère n'est pas constante. On suppose qu'elle obéit à une loi de type gaz parfait isotherme

$$p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0}$$

où  $p_0$  et  $\rho_0$  sont la pression et la masse volumique au niveau de la mer.

1) Donner l'expression de la pression  $p$  et de la masse volumique en fonction de l'altitude  $z$ .

- 2) Application numérique :  $p_0 = 1013 \text{ mbar}$ ,  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $z = 10 \text{ km}$ .

**Exercice 2.13.** Déterminer l'expression de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude, sachant que la masse volumique de l'air obéit à une loi du type gaz parfait :

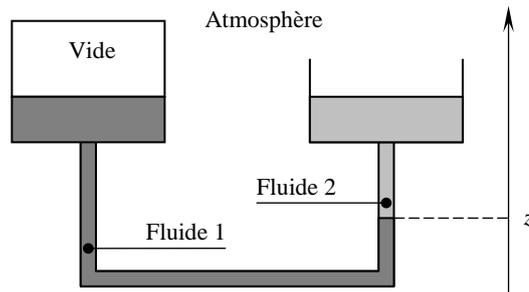
$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0}$$

où  $p$ ,  $T$  et  $\rho$  sont la pression, la température (K) et la masse volumique de l'air. On suppose généralement que la température décroît linéairement avec l'altitude :

$$T(z) = T_0 - az$$

**Exercice 2.14. Baromètre à deux liquides.** Un baromètre à deux liquides (incompressibles) est construit de la façon suivante :

- deux réservoirs sont reliés entre eux par un tube. Le réservoir de gauche (Figure 2.20) est fermé, le réservoir de droite est à l'air libre, donc à la pression atmosphérique ;
- La partie gauche du tube est remplie avec le liquide 1, de masse volumique  $\rho_1$ . La partie droite est remplie avec le liquide 2, de masse volumique  $\rho_2$ . Dans le réservoir de gauche, le vide est fait au-dessus de la surface libre du liquide 1 (donc  $p = 0$ ). Les altitudes des surfaces libres sont notées  $z_1$  et  $z_2$ . Elles ne sont pas nécessairement identiques ;
- sous l'effet des variations de pression atmosphérique, l'altitude  $z$  de l'interface entre les deux liquides varie. Cependant, les réservoirs ont des surfaces en plan suffisamment importantes pour que les niveaux des surfaces libres des deux liquides puissent être considérés comme constants, même lorsque l'interface se déplace.

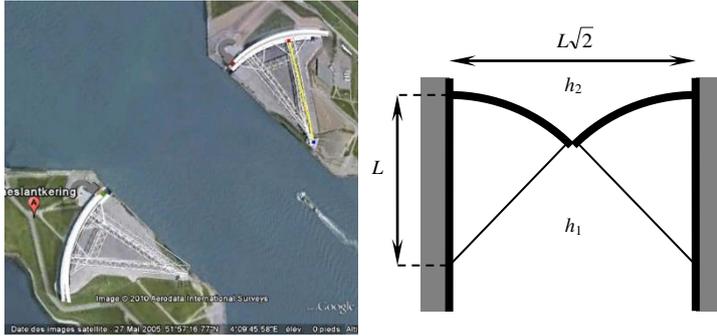


**Figure 2.20.** Baromètre à deux fluides.

Le baromètre est étalonné de la façon suivante : un jour où la pression atmosphérique est égale à une pression  $p_0$  connue (définie à l'avance ; par exemple, 1 bar), on repère l'altitude  $z_0$  de l'interface entre les deux liquides.

- 1) Donner l'expression de la pression  $p$  en fonction de  $p_0$ ,  $z_0$ ,  $z$  et des masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et de tout autre donnée que vous estimerez pertinente.
- 2) Expliquer quel est l'intérêt d'un tel dispositif par rapport à un baromètre classique utilisant un seul liquide (justifier votre réponse) ?

**Exercice 2.15.** Le barrage du Maeslantkering (Pays-Bas) est un barrage mobile dont la fonction est d'empêcher l'entrée des marées-tempêtes dans le delta du système Rhin-Meuse. Il est formé de deux portes en arc de cercle qui pivotent chacune sur leur axe pour refermer le chenal du Nieuwe Waterweg (Figure 2.21).



**Figure 2.21.** Barrage du Maeslantkering. Gauche : vue aérienne en position ouverte (Crédits Google Earth). Droite : schéma de principe (vue de dessus) en position fermée. La mer du Nord est située du côté bombé des portes.

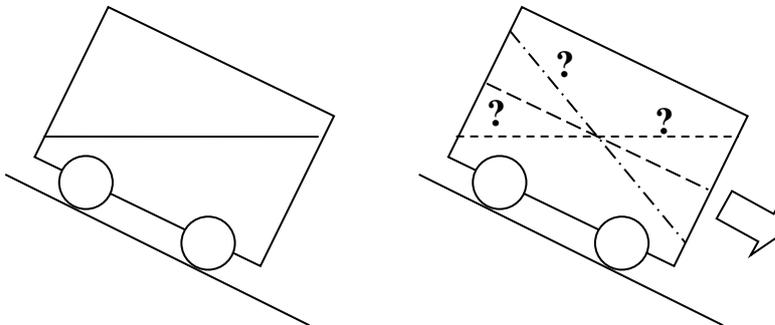
Chacune des deux portes forme un secteur circulaire d'ouverture 45 degrés. Le rayon du secteur circulaire est noté  $L$ . Chacune des portes se referme en pivotant autour de l'axe du secteur circulaire lorsque la différence entre les hauteurs d'eau  $h_1$  dans le chenal et  $h_2$  dans la mer du Nord est de l'ordre de 3 mètres.

- 1) Donner l'expression de la force exercée sur l'axe de chacune des deux portes lorsque le barrage est en position fermée, en fonction de  $g$ ,  $h_1$  et  $h_2$ ,  $L$  et la masse volumique  $\rho$  de l'eau (on utilisera la même masse volumique pour l'eau douce et l'eau salée).

Attention : la force de pression a deux composantes (une en  $x$ , une en  $y$ ) !

- 2) Application numérique :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $h_1 = 18 \text{ m}$ ,  $h_2 = 21 \text{ m}$ ,  $L = 250 \text{ m}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

**Exercice 2.16.** On place de l'eau dans un chariot que l'on immobilise sur une pente uniforme (Figure 2.22). À  $t = 0$ , on lâche le chariot et celui-ci se met à rouler librement (sans frottement) le long de la pente. Quelle est la forme de la surface libre dans le chariot une fois que les remous se sont dissipés ?



**Figure 2.22.** Liquide dans un chariot libre de rouler le long d'une pente uniforme.

**Exercice 2.17.** On place de l'eau dans une cuve circulaire que l'on fait tourner autour de son axe à une vitesse angulaire  $\omega$  (Figure 2.23) Au bout d'un certain temps, l'eau est entraînée à la même vitesse que la cuve.

Donner l'équation de la surface libre en fonction de la distance à l'axe.

Remarque : on notera que, dans le repère lié à la cuve en rotation, l'accélération de la pesanteur « apparente » est donnée par la somme de deux termes : l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  et la force centrifuge  $\omega^2 r \vec{e}_r$ .

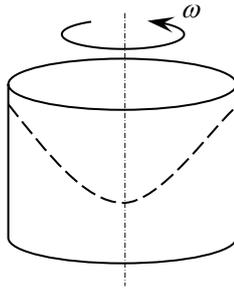


Figure 2.23. Eau dans une cuve circulaire en rotation.

**Exercice 2.18.** Cet exercice a été donné en examen à plusieurs reprises.

Un flotteur de forme conique est placé pointe en bas dans l'eau (Figure 2.24). On note  $\theta$  le demi-angle au sommet. Le flotteur a été réalisé dans un matériau homogène de masse volumique  $\rho_f$ .

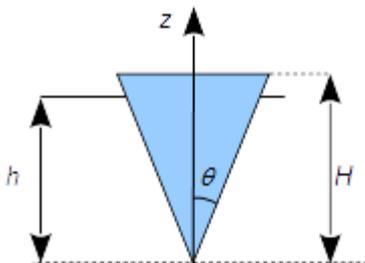


Figure 2.24. Flotteur conique.

1. Comment  $\rho_f$  se compare-t-elle à la masse volumique  $\rho_e$  de l'eau ? Justifier votre réponse.
2. Donner l'expression de la profondeur  $h$  à laquelle le flotteur s'enfonce sous l'eau en fonction de sa hauteur totale  $H$ , ainsi que de tout autre paramètre que vous jugerez nécessaire.

N.B. Volume d'un cône de surface de base  $A$  et de hauteur  $h$  (cas particulier de pyramide):  $V = Ah/3$ .

**Exercice 2.19.** Cet exercice a été donné en examen.

Un autocuiseur (aussi appelé « cocotte-minute ») permet d'accélérer la cuisson des aliments en chauffant l'eau à une température supérieure à  $100^\circ\text{C}$ . Ceci est possible en augmentant la pression à l'intérieur de l'autocuiseur. Celui-ci est constitué d'un corps cylindrique en métal sur lequel on clipse un couvercle circulaire. Le couvercle est percé d'un orifice. Dans les anciens modèles, une masselotte (soupape) est posée sur cet orifice (Figure 2.25). Lorsque la pression dans l'autocuiseur est inférieure à une valeur fixée  $p_0$ , la masselotte reste en place. Dès que la pression à l'intérieur de l'autocuiseur dépasse  $p_0$ , la masselotte se soulève et permet à la vapeur de s'échapper; la pression est alors automatiquement ramenée à  $p_0$ . On note  $D$  et  $d$  les diamètres de la cuve et de l'orifice. La pression atmosphérique est notée  $p_{\text{atm}}$ . L'accélération de la pesanteur est notée  $g$ .

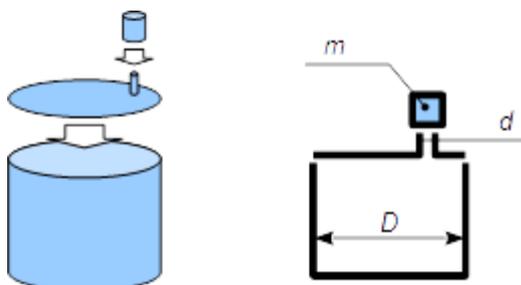
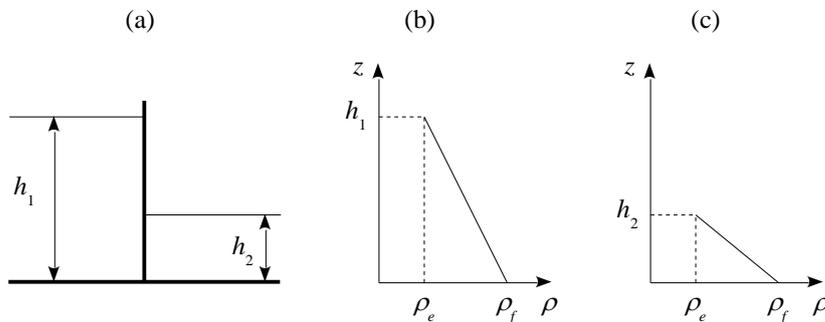


Figure 2.25. Autocuiseur. Schéma de principe.

1. Donner l'expression de la force exercée sur le couvercle lorsque la pression de fonctionnement  $p_0$  est atteinte (cette force sert à dimensionner les attaches du couvercle). Attention: ne pas oublier que la pression atmosphérique règne au-dessus du couvercle.
2. Déterminer l'expression de la masse  $m$  de la masselotte qui permettra d'atteindre la pression de fonctionnement  $p_0$ .
3. Application numérique:  $D = 30\text{cm}$ ,  $d = 2\text{mm}$ ,  $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $p_0 = 1,8\text{bar}$ ,  $p_{\text{atm}} = 1\text{bar}$
4. On pose par mégarde un ustensile de cuisine (masse 100g) sur la soupape. Quelle va être la valeur atteinte par la pression à l'intérieur de l'autocuiseur avant que la soupape puisse se soulever ? Quelle sera la force exercée sur le couvercle ?

**Exercice 2.20.** Liquide stratifié derrière une porte d'écluse. Cet exercice a été donné en examen.

On considère une porte d'écluse rectangulaire de largeur  $L$ . Les profondeurs de l'eau en amont et en aval de l'écluse sont notées respectivement  $h_1$  et  $h_2$  (Figure 2.26a). L'eau étant chargée en sédiments, sa masse volumique n'est pas constante avec l'altitude. Elle est égale à  $\rho_e$  (masse volumique de l'eau douce) en surface et à  $\rho_f$  au fond. On suppose que la masse volumique évolue linéairement en fonction de l'altitude (Figure 2.26b pour le côté amont de la porte, Figure 2.26c pour le côté aval).

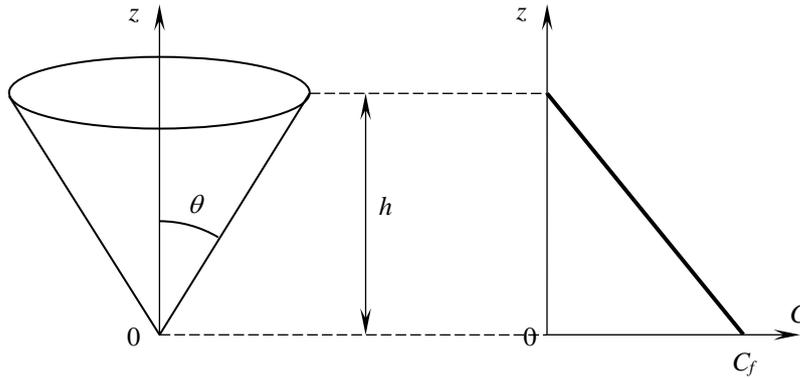


**Figure 2.26.** Liquide stratifié.

1. Donner l'expression de la masse volumique  $\rho(z)$  du côté amont de la porte. Même question pour le profil de masse volumique du côté aval.
2. En déduire l'expression des profils de pression  $p(z)$  des côtés amont et aval de la porte. On conseille de donner la pression en référence à la pression atmosphérique.
3. Donner l'expression de la force de poussée totale par unité de largeur sur la porte d'écluse.
4. Faire l'application numérique avec  $g = 9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $h_1 = 5\text{ m}$ ,  $h_2 = 3\text{ m}$ ,  $\rho_e = 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_f = 1,5\cdot 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Préciser en particulier les points suivants:
  - (a) la pression au fond de chacun des deux côtés de la porte,
  - (b) la force de pression totale par unité de largeur sur chaque face de la porte,
  - (c) la force de pression totale par unité de largeur de la porte.
5. Quelle aurait été l'erreur commise sur le calcul de la force de pression si, pour simplifier le calcul, on avait supposé une masse volumique uniforme, égale à  $\rho_e$ , sur toute la profondeur ?

**Exercice 2.21.** Déjà donné en examen.

Un liquide contenant des matériaux en suspension est stocké dans une cuve conique (Figure 2.27, gauche). Du fait de la décantation des matériaux en suspension, la composition du liquide n'est pas uniforme : la concentration  $C$  de matières en suspension varie linéairement de  $C = 0$  à la surface à  $C = C_f$  au fond de la cuve (Figure 2.27, droite). On note  $h$  la hauteur de remplissage de la cuve,  $\rho$  la masse volumique du liquide pur et  $\theta$  le demi-angle au sommet de la cuve.



**Figure 2.27.** Réservoir conique. Gauche : schéma de principe en perspective. Droite : profil de concentration sur la verticale.

- 1) En supposant que la surface libre est à la pression atmosphérique (que l'on prendra comme référence) et que le liquide est au repos, déterminer le profil de pression  $p(z)$ .
- 2) Calculer la pression au fond de la cuve pour les paramètres donnés dans le Tableau 1.
- 3) Donner l'expression de la force exercée par le liquide sur la cuve (on prendra la pression atmosphérique comme référence).
- 4) Calculer cette force pour les paramètres donnés dans le Tableau ci-dessous. Était-il important de prendre en compte la variation de masse volumique liée à la variation de  $C$ , ou bien un calcul en utilisant simplement  $\rho$  aurait-il suffi ?

Notation	Signification	Valeur numérique
$C_f$	Concentration au fond de la cuve	$300 \text{ g.L}^{-1}$
$g$	Accélération de la pesanteur	$9,81 \text{ m.s}^{-2}$
$h$	Hauteur de remplissage de la cuve	$5 \text{ m}$
$\rho$	Masse volumique du liquide pur	$10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
$\theta$	Demi-angle au sommet de la cuve	$45^\circ$

## Chapitre 3

# Ecoulement des fluides parfaits

### Objectifs du chapitre

A la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir :

- 1) Définir en vos propres termes les notions de régimes permanent et transitoire, de trajectoire, de ligne de courant et de ligne d'émission, de description Lagrangienne et Eulérienne, d'écoulement compressible ou incompressible ;
- 2) Déterminer par le calcul les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission, à partir de l'expression du champ des vitesses ;
- 3) Appliquer l'hypothèse de conservation de la masse (continuité) à des cas simples, notamment à des écoulements permanents, compressibles et incompressibles, ou à des écoulements unidimensionnels ;
- 4) Appliquer l'équation de conservation de la quantité de mouvement et le théorème d'Euler à des écoulements simples pour déterminer des forces exercées par des écoulements sur des obstacles ;
- 5) Vérifier et appliquer le théorème de Bernoulli et le théorème de Bernoulli généralisé à des écoulements simples afin de déterminer les champs de pression ou de vitesse.

### 3.1 Définitions et outils mathématiques

#### 3.1.1 Définitions

**Régime permanent/transitoire.** Lorsqu'un fluide est en mouvement, les grandeurs telles que la pression, la masse volumique, la vitesse, *etc.* sont en général fonctions à la fois du temps et de l'espace. On distingue deux grandes familles d'écoulement :

- les régimes d'écoulement permanents, où les variables de l'écoulement ne dépendent pas du temps. Dans les équations, la *dérivée partielle de toutes les variables par rapport au temps est nulle*,  $\partial / \partial t = 0$  ;
- les régimes transitoires, où les variables de l'écoulement sont dépendantes du temps. Il existe alors des variables dont la dérivée partielle par rapport au temps n'est pas nulle.

*N.B.* : il s'agit bien de la dérivée partielle  $\partial / \partial t$ , qui exprime la variation de la variable par rapport au temps lorsque l'on se place en un point  $(x, y, z)$  fixé, sans se déplacer !

**Trajectoire.** La trajectoire d'une particule est l'ensemble des positions  $(x, y, z)(t)$  occupées par cette particule au cours du temps. Par définition, l'équation de la trajectoire est la suivante :

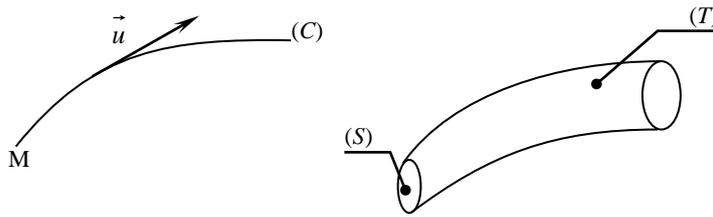
$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= u(x, t) \\ dy/dt &= v(x, t) \\ dz/dt &= w(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

*N.B.* L'accolade signifie que les 3 équations sont satisfaites simultanément.

**Ligne de courant, tube de courant.** Une ligne de courant est la courbe issue d'un point M donné dont la tangente est parallèle au vecteur vitesse en tout point. Sa définition mathématique est la suivante :

$$\frac{dx(t)}{u(x, t)} = \frac{dy(t)}{v(x, t)} = \frac{dz(t)}{w(x, t)} \quad (3.2)$$

Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant issues d'une surface  $(S)$  donnée placée dans l'écoulement (Figure 3.1).



**Figure 3.1.** Ligne de courant issue d'un point M (gauche), tube de courant issu d'une surface (S) (droite).

*N.B.* : Attention, les lignes de courant ne sont pas nécessairement identiques aux trajectoires. Une ligne de courant est tracée à une date  $t$  donnée, alors qu'une trajectoire est un ensemble de positions prises au cours du temps, donc lorsque  $t$  varie.

**Ligne d'émission.** La ligne d'émission est la ligne formée par les particules qui sont passées au cours du temps par un point M donné et qui ont été transportées à la vitesse de l'écoulement.

**Equivalences.** Dans le cas du régime permanent, la trajectoire, la ligne de courant et la ligne d'émission issues d'un même point M sont identiques. Attention : ceci n'est plus vrai en régime transitoire !

**Écoulement compressible/incompressible.** Dans un écoulement compressible, la masse volumique du fluide est variable. Dans un écoulement incompressible, elle ne l'est pas.

**Charge, piézométrie, pressions.** On définit les grandeurs suivantes (et l'on les rappelle, pour certaines) :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \|\vec{u}\|^2 : \quad \text{énergie totale du fluide}$$

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \|\vec{u}\|^2 : \quad \text{charge}$$

$$p^* = p + \rho g z : \quad \text{pression étoilée, ou pression motrice}$$

$$\frac{p}{\rho g} + z : \quad \text{cote piézométrique}$$

$$p + \frac{\rho u^2}{2} : \quad \text{pression dynamique}$$

$$h = \frac{p}{\rho g} : \quad \text{hauteur manométrique}$$

### 3.1.2 Descriptions Eulérienne et lagrangienne du mouvement

Il existe deux manières d'étudier et de décrire un écoulement : l'approche Eulérienne et l'approche Lagrangienne.

**Approche Eulérienne.** Dans cette approche, on se place en un point donné ou une petite région (fixe) de l'espace, et l'on étudie ce qui se passe en ce point ou dans cette région alors que le temps varie. Pour l'observateur placé en cet endroit, les dérivées des variables de l'écoulement par rapport au temps sont des *dérivées partielles*.

**Approche Lagrangienne.** Dans l'approche Lagrangienne, on choisit une particule (ou un ensemble de particules) et l'on se déplace avec elle(s) en suivant leur évolution au cours du temps. On est donc dans la position d'un observateur qui se déplace à la vitesse des particules, et qui vérifie donc les relations (3.1).

**Dérivée Lagrangienne (particulière).** On considère un observateur qui se déplace à la vitesse de l'écoulement. Ses coordonnées vérifient donc (3.1). Toute variable  $f$  décrivant l'écoulement (par exemple la pression, la masse volumique, *etc.*) est dépendante de l'espace et du temps en général ; elle peut donc se mettre sous la forme

$$f = f(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

Au cours d'une durée  $dt$  infinitésimale, l'observateur se déplace dans l'espace d'un déplacement infinitésimal dont les coordonnées sont

$$\left. \begin{aligned} dx &= u dt \\ dy &= v dt \\ dz &= w dt \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Il observe une variation  $df$  de la variable de l'écoulement. Par définition des dérivées partielles, cette variation est donnée par

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (3.5)$$

En introduisant dans (3.5) les définitions de  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ , on obtient

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} u dt + \frac{\partial f}{\partial y} v dt + \frac{\partial f}{\partial z} w dt \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \right) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

On a donc

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.7)$$

Cette dérivée droite  $df/dt$  est appelée la *dérivée Lagrangienne*, ou *dérivée particulière*, ou encore *dérivée totale*. On la note parfois  $Df/Dt$ .

*N.B.* : Attention, il ne faut pas confondre la dérivée Eulérienne  $\partial f / \partial t$  avec la dérivée Lagrangienne  $df/dt$ . On n'a le droit d'écrire  $df/dt$  que lorsque la fonction  $f$  ne dépend que de  $t$ . C'est effectivement le cas pour établir (3.7) car on a pour cela transformé  $x$ ,  $y$  et  $z$  en des fonctions de  $t$  en les faisant obéir aux relations (3.4).

## 3.2 Conservation de la masse (continuité)

### 3.2.1 Forme intégrale

On considère un domaine  $\Omega$  de l'espace. Ce domaine ne se déforme pas. Sa frontière est notée  $\Gamma$  et le vecteur normal unitaire de  $\Gamma$ , orienté vers l'extérieur, est noté  $\vec{n}$  (Figure 3.2). Ce domaine n'a pas besoin d'avoir des frontières solides, il peut être imaginaire, pourvu que sa géométrie ne change pas dans le temps. Le champ des vitesses  $\vec{u}$  et la masse volumique  $\rho$  dépendent *a priori* du temps et de l'espace.

On cherche à établir une équation de conservation de la masse sur le domaine  $\Omega$ . En langage « naturel », celle-ci s'exprime sous la forme suivante :

« La variation de la masse contenue dans le domaine est égale à la quantité nette de matière qui est rentrée par la frontière du domaine. »

La quantité nette est égale à ce qui est entré moins ce qui est sorti.

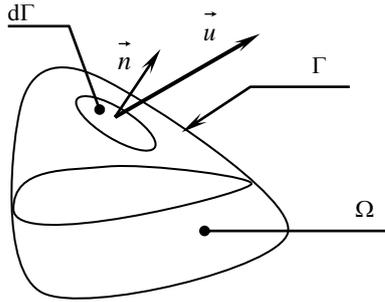


Figure 3.2. Bilan sur un domaine dans l'espace.

Pour écrire l'équation de conservation de la masse, on procède en plusieurs étapes.

- 1) **Expression de la variation de la masse contenue dans le domaine.** La variation de la masse totale contenue dans le domaine entre  $t$  et  $t + dt$  est, par définition

$$\begin{aligned} M(t + dt) - M(t) &= \int_{\Omega} dm(t + dt) d\Omega - \int_{\Omega} dm(t) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [dm(t + dt) - dm(t)] d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $dm$  est la masse contenue dans l'élément infinitésimal de volume  $d\Omega$  du domaine  $\Omega$ . A la date  $t$ , la masse  $dm(t)$  contenue dans cet élément est :

$$dm(t) = \rho(x, y, z, t) d\Omega \quad (3.9)$$

A la date  $t + dt$ , cette masse est donnée par :

$$dm(t + dt) = \rho(x, y, z, t + dt) d\Omega \quad (3.10)$$

La variation de cette masse entre les dates  $t$  et  $t + dt$  peut être approchée par la définition de la dérivée partielle :

$$dm(t + dt) - dm(t) \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega \quad (3.11)$$

En substituant (3.11) dans (3.8), on obtient

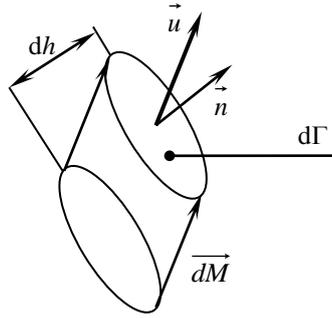
$$M(t + dt) - M(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\Omega \quad (3.12)$$

La frontière de  $\Omega$  étant fixe, l'intégration par rapport à l'espace et la dérivée par rapport au temps sont interchangeables. (3.12) devient :

$$M(t + dt) - M(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega dt \quad (3.13)$$

- 2) **Expression de la masse entrant par une surface élémentaire de la frontière.** On considère une surface élémentaire  $d\Gamma$  de la frontière  $\Gamma$  (Figure 3.3). On cherche l'expression de la quantité de masse qui rentre dans le domaine  $\Omega$  par cette surface élémentaire au cours d'une durée  $dt$ .

Le volume  $dV$  qui passe par la surface élémentaire  $d\Gamma$  au cours de la durée  $dt$  est un cylindre dont la base est  $d\Gamma$  et dont la génératrice est donnée par le vecteur déplacement  $\overline{dM} = \vec{u} dt$  (Figure 3.3).



**Figure 3.3.** Quantité de matière passant par un élément de frontière infinitésimal.

La masse de fluide contenue dans ce volume est donnée par

$$dm' = \rho dV \quad (3.14)$$

et le volume  $dV$  est égal au produit de la surface de base et de la hauteur  $dh$

$$dV = d\Gamma dh = d\Gamma (\vec{dM} \cdot \vec{n}) = d\Gamma (\vec{u} dt \cdot \vec{n}) = (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma dt \quad (3.15)$$

Par conséquent, en remplaçant (3.15) dans (3.14), on obtient

$$dm' = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma dt \quad (3.16)$$

Attention, ce volume *sort* de  $\Omega$  car le vecteur normal est orienté sortant. La masse *entrant* dans le volume est donc  $-dm'$ .

- 3) **Bilan de masse sur la durée  $dt$ .** Au cours de la durée  $dt$ , la masse totale contenue dans le domaine augmente de  $dM$ . Cette augmentation est due à la contribution de toutes les masses élémentaires  $-dm'$  entrées par toutes les surfaces élémentaires  $d\Gamma$  de la frontière :

$$M(t + dt) - M(t) = \int_{\Gamma} -dm' = -\int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma dt \quad (3.17)$$

En remplaçant la définition (3.13) de  $M$  et en divisant par  $dt$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = -\int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (3.18)$$

soit encore :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

A noter que, puisque les frontières de  $\Omega$  sont immobiles, on peut permuter la dérivée partielle par rapport au temps et l'intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Forme différentielle

La forme différentielle s'obtient à partir de la forme intégrale en utilisant la définition de la divergence. En effet, d'après (1.33), on a :

$$\int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{Div}(\rho \vec{u}) d\Omega \quad (3.21)$$

Donc (3.19) devient

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

En choisissant  $\Omega$  comme le volume élémentaire  $dx \times dy \times dz$ , on obtient :

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] dx dy dz = 0 \quad (3.23)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.24)$$

Cette équation peut également s'écrire en développant la quantité à l'intérieur de la divergence :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}} \rho + \rho \text{Div} \vec{u} = 0 \quad (3.25)$$

c'est-à-dire, vu la définition de la dérivée particulaire :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{Div} \vec{u} = 0 \quad (3.26)$$

### 3.2.3 Cas particuliers

**Régime permanent.** Par définition du régime permanent,  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Alors, (3.24) devient :

$$\text{Div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.27)$$

**Fluide incompressible.** Dans le cas d'un fluide incompressible, la masse volumique est constante par rapport au temps pour une particule que l'on suit dans son mouvement :  $d\rho/dt = 0$ . Alors, (3.26) devient :

$$\text{Div} \vec{u} = 0 \quad (3.28)$$

**Écoulement unidimensionnel.** Dans le cas où l'écoulement est unidimensionnel,  $\rho$  et  $u$  ne dépendent que d'une seule direction de l'espace (dans ce qui suit, on appelle  $x$  cette direction). Alors, il est pratique de définir les volumes de contrôle comme suit (Figure 3.4) :

- la surface latérale est formée par les lignes de courant, que l'on suppose constantes dans le temps. C'est le cas par exemple lorsque l'on est dans une conduite. La surface latérale est alors la surface de la conduite ;
- les faces aval et amont (en  $x_1$  et en  $x_2$ ) sont perpendiculaires à l'axe  $x$ .

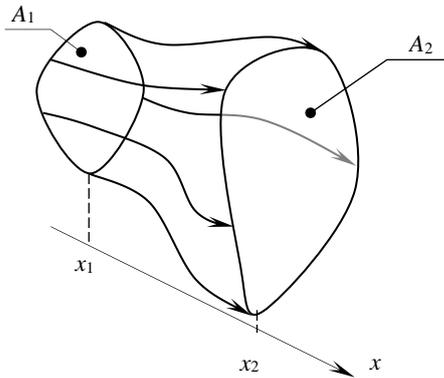


Figure 3.4. Écoulement unidimensionnel.

La forme intégrale (3.19) donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_L} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (3.29)$$

où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  désignent respectivement les frontières en  $x_1$  et  $x_2$ ,  $\Gamma_L$  étant la frontière latérale. A noter que par définition des lignes de courant, le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  est nul sur  $\Gamma_L$ . L'équation (3.29) se réduit donc à :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (3.30)$$

De plus, comme les variables de l'écoulement dépendent de  $x$  et de  $t$  uniquement,  $u$  et  $r$  sont constantes sur chacune des deux sections  $A_1$  et  $A_2$ . Alors, (3.17) se simplifie de la façon suivante :

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \rho_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 A_2 = 0 \quad (3.31)$$

(N.B. : on a utilisé le fait que  $\vec{n} = -\vec{x}$  sur la face  $x_1$  et que  $\vec{n} = +\vec{x}$  sur la face  $x_2$ ). L'équation (3.31) peut également s'écrire sous les formes suivantes, toutes équivalentes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2 \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \rho_1 Q_1 - \rho_2 Q_2 \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= q_1 - q_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

où  $Q = Au$  est le débit (produit de la vitesse et de la section) et  $q$  est le débit massique (produit du débit et de la masse volumique).

**Ecoulement unidimensionnel permanent.** Lorsque l'écoulement est permanent, la dérivée partielle par rapport au temps est nulle et les trois formulations équivalentes (3.32) se réduisent à :

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 u_1 A_1 &= \rho_2 u_2 A_2 \\ \rho_1 Q_1 &= \rho_2 Q_2 \\ q_1 &= q_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

**Ecoulement unidimensionnel incompressible.** Lorsque l'écoulement est incompressible, la masse volumique est la même quels que soient  $x$  et  $t$ . Alors il ne peut pas y avoir accumulation de masse à l'intérieur du volume  $\Omega$  puisque ses frontières sont fixes. Donc  $\partial M / \partial t = 0$  et les formes (3.32) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} u_1 A_1 &= u_2 A_2 \\ Q_1 &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

### 3.3 Conservation de la quantité de mouvement

#### 3.3.1 Forme intégrale

**Principe fondamental de la dynamique modifié.** La forme intégrale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'établit en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un volume  $\Omega$  immobile. On rappelle qu'à l'origine, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{F} \quad (3.35)$$

où  $d\vec{U}/dt$  est la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps et  $\vec{F}$  est la somme des forces extérieures appliquées sur le domaine  $\Omega$ .

Attention : ce théorème est applicable tel quel à des systèmes dont la masse est fixe, donc qui n'échangent pas de matière avec l'extérieur ! De plus, la différentielle totale  $d/dt$  indique que l'on suit ces systèmes dans l'espace, on est donc en coordonnées lagrangiennes. Le théorème n'est plus vrai si l'on considère que le fluide peut circuler au travers de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ . Dans ce dernier cas, il faut adapter le théorème en tenant compte des échanges de quantité de mouvement vers l'extérieur. Le principe fondamental de la dynamique devient alors :

$$\frac{\partial QdM}{\partial t} = \vec{F} + \vec{D} \quad (3.36)$$

Le vecteur  $\vec{D}$  est le débit de quantité de mouvement apporté au volume  $\Omega$  par les particules fluides qui traversent la frontière  $\Gamma$ .

**Variation de la quantité de mouvement à l'intérieur du domaine.** La quantité de mouvement  $d\vec{\sigma}$  d'un élément de volume  $d\Omega$  est donnée par :

$$d\vec{\sigma} = \rho\vec{u} d\Omega \quad (3.37)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\vec{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) d\Omega \quad (3.38)$$

et la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale du volume  $\Omega$  s'obtient en intégrant cette quantité sur tout le domaine :

$$\frac{\partial QdM}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) d\Omega \quad (3.39)$$

**Débit de quantité de mouvement par les frontières du domaine.** Ce débit de quantité de mouvement s'obtient exactement de la même manière que le débit massique obtenu au 3.3.1. Il suffit de se rappeler que la quantité de mouvement  $\rho\vec{u}$ , tout comme la masse volumique  $\rho$ , est transportée à la vitesse  $\vec{u}$  de l'écoulement. Il suffit donc, dans l'équation (3.16), de remplacer  $\rho$  par  $\rho\vec{u}$  :

$$d\vec{D} = -\rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) d\Gamma dt \quad (3.40)$$

(N.B. le signe moins vient du fait que le vecteur normal est orienté vers l'extérieur et comptabilise donc comme positive la quantité sortante du domaine. Pour obtenir la valeur de la quantité entrante, le signe moins est donc nécessaire).

D'où le débit total au travers de la frontière :

$$\vec{D} = \frac{1}{dt} \int_{\Gamma} d\vec{D} = - \int_{\Gamma} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) d\Gamma \quad (3.41)$$

**Forme finale : théorème d'Euler.** En substituant (3.39) et (3.41) dans (3.36), on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) d\Gamma = \vec{F} \quad (3.42)$$

ou encore, puisque la frontière du domaine est fixe :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho\vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n}) d\Gamma = \vec{F} \quad (3.43)$$

L'équation (3.43) est connue sous le nom de *théorème d'Euler*.

### 3.3.2 Forme différentielle

En appliquant (3.43) à un élément de volume infinitésimal  $dx \times dy \times dz$ , on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) &= f_x \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) &= f_y \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) &= f_z \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

où  $f_x, f_y$  et  $f_z$  sont les composantes en  $x, y$  et  $z$  de la force par unité de volume. On peut également développer les termes dans les dérivées partielles (on ne le fait ici que pour  $u$ ) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) \\
 & = \\
 & \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) u + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} \\
 & = \\
 & \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] u + \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ce qui donne, en notant que la première quantité entre parenthèses est nulle (équation de continuité (3.23)) :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{f_x}{\rho} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{f_y}{\rho} \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{f_z}{\rho}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

On vérifie (développements un peu longs, non présentés ici) que (3.46) s'écrit également sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}}(\|\vec{u}\|^2) + \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) \times \vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{f} \quad (3.47)$$

### 3.3.3 Cas particuliers

**Fluide soumis à un champ de pression et une force volumique.** On considère le cas où le fluide est soumis aux forces de pression et à son poids. Alors, la forme intégrale devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma = M \vec{g} - \int_{\Gamma} p \vec{n} \, d\Gamma \quad (3.48)$$

(N.B. : le signe – devant l'intégrale de la pression est dû au fait que le vecteur normal est orienté vers l'extérieur).

La forme différentielle devient

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g
 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

On peut également écrire ce système sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}}(\|\vec{u}\|^2) + \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad}} p + \vec{g} \quad (3.50)$$

**Régime permanent.** Les dérivées partielles par rapport au temps disparaissent :

$$\int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma = M \vec{g} - \int_{\Gamma} p \vec{n} \, d\Gamma \quad (3.51)$$

et

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

ou encore :

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \|\vec{u}\|^2 \right) + \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad}} p + \vec{g} \quad (3.53)$$

**Écoulement unidimensionnel transitoire.** On est dans le cas où la vitesse, la pression et la masse volumique ne dépendent que de  $x$ . On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho Q dx + (\rho Qu)(x_2) - (\rho Qu)(x_1) = Mg_x + Ap(x_1) - Ap(x_2) \quad (3.54)$$

où  $g_x$  est la projection de  $g$  sur l'axe des  $x$ .

**Écoulement unidimensionnel permanent.** Dans ce cas, la dérivée partielle par rapport au temps disparaît et (3.51) devient

$$(\rho Qu)(x_2) - (\rho Qu)(x_1) = Mg_x + Ap(x_1) - Ap(x_2) \quad (3.55)$$

## 3.4 Conservation de l'énergie

### 3.4.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

- le fluide est incompressible,
- le régime est permanent,
- on se place le long d'une ligne de courant,
- l'écoulement est irrotationnel,
- les seules forces exercées sur un élément de fluide sont le poids et la force de pression.

### 3.4.2 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli s'obtient en intégrant l'équation de quantité de mouvement (3.50) le long d'une ligne de courant. On fait le produit scalaire de l'équation (3.50) avec un déplacement  $d\vec{M}$  :

$$\left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \|\vec{u}\|^2 \right) + \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad}} p + \vec{g} \right] d\vec{M} \quad (3.56)$$

D'après l'hypothèse d'écoulement irrotationnel et de régime permanent, cette équation se simplifie en :

$$\left[ \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \|\vec{u}\|^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad}} p + \vec{g} \right] d\vec{M} \quad (3.57)$$

En observant que le vecteur gravité est le gradient de la quantité  $-gz$ , on obtient :

$$\left[ \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{Grad}} \left( \|\vec{u}\|^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{Grad}} p - \overrightarrow{\text{Grad}}(gz) \right] d\vec{M} \quad (3.58)$$

En passant toutes les quantités sous le même opérateur gradient (on utilise l'hypothèse d'incompressibilité, donc  $\rho = \text{Cste}$ ), il vient :

$$\left[ \vec{\text{Grad}} \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \right] \cdot d\vec{M} = 0 \quad (3.59)$$

Par définition du gradient, on a :

$$d \left( \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (3.60)$$

C'est-à-dire que le long d'une ligne de courant, on a :

$$H = \frac{\|\vec{u}\|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{Cste} \quad (3.61)$$

La charge est donc constante le long d'une ligne de courant.

### 3.4.3 Théorème de Bernoulli généralisé

Le théorème de Bernoulli généralisé est applicable le long des lignes de courant, en abandonnant l'hypothèse de régime permanent. Les autres hypothèses du théorème de Bernoulli continuent d'être vraies. On a alors, en répétant les opérations du 3.4.2 :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{M} + H_A - H_B = 0 \quad (3.62)$$

où A et B sont les deux points d'une même ligne de courant.

## 3.5 Applications

### 3.5.1 Applications du théorème d'Euler

Le théorème d'Euler s'utilise en général dans des configurations où la géométrie de l'écoulement est bien connue, où l'on peut faire des hypothèses sur la répartition des pressions dans des sections d'écoulement, etc. Par exemple, pour calculer :

- l'effort d'un jet sur un obstacle ;
- la force créée par un écoulement dans un coude ;
- l'effort sur un changement de section ;
- sous forme différentielle (équations d'Euler) : la distribution des pressions dans un écoulement dont le champ des vitesses est connu ; ou réciproquement, la distribution des vitesses dans un écoulement sous un champ de pression connu.

### 3.5.2 Applications du théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est pratique d'utilisation dans les configurations où la géométrie de l'écoulement n'est pas bien connue, ou bien si l'on ne connaît pas le champ de pression en tout point, ou encore si l'on cherche à le déterminer dans un écoulement de géométrie complexe (en vue par exemple d'appliquer le théorème d'Euler), ou encore pour déterminer la pression en un point précis. Comme applications typiques, on citera :

- le calcul de la vitesse de vidange d'un réservoir à surface libre (formule de Torricelli) ;
- le vase de Mariotte (un dispositif qui donne un débit constant) ;
- le tube de Pitot, plus tard amélioré sous le nom de tube de Prandtl, qui permet de mesurer la vitesse d'un écoulement.

### 3.5.3 Applications du théorème de Bernoulli généralisé

Le théorème de Bernoulli généralisé s'utilise dans les mêmes circonstances que le théorème de Bernoulli, mais lorsque l'écoulement n'est pas permanent.

### 3.6 A retenir

#### 3.6.1 Les grandes lignes

La conservation de la masse peut s'écrire sous forme intégrale ou sous forme différentielle. Dans la forme différentielle, la variation de la masse volumique est égale à l'opposé de la divergence du débit massique.

Dans le cas d'un écoulement permanent, la divergence de la quantité de mouvement  $\rho \vec{u}$  est nulle. Dans le cas d'un écoulement incompressible, la divergence de la vitesse  $\vec{u}$  est nulle.

#### 3.6.2 A savoir absolument

- Les définitions du régime permanent et transitoire, d'un écoulement incompressible, de la trajectoire, des lignes de courant et d'émission ;
- La définition de la dérivée Lagrangienne ;
- la forme intégrale et la forme différentielle de la continuité. Les cas particuliers des écoulements unidimensionnels ;
- le théorème d'Euler en régime permanent ;
- le théorème de Bernoulli et le théorème de Bernoulli généralisé ;

### 3.7 Suggestions d'exercices

**Exercice 3.1.** On considère les deux champs de vitesse suivants :

Le premier champ de vitesse varie dans le temps mais pas dans l'espace

$$\left. \begin{array}{l} u = \cos \omega t \\ v = \sin \omega t \end{array} \right\} \quad (3.63)$$

Le deuxième champ de vitesses varie dans l'espace mais pas dans le temps

$$\left. \begin{array}{l} u = -\omega y \\ v = \omega x \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

On considère un point M de coordonnées  $(x_0, y_0)$  à  $t = 0$ . Pour chacun de ces deux champs, donner les expressions des trajectoires, des lignes de courant et des lignes d'émission issues du point M. Comparer pour les deux champs et relier les résultats aux remarques de la section 3.1.

**Exercice 3.2.** Établir l'équation de continuité en coordonnées cylindriques

- pour un fluide en régime permanent,
- pour un fluide incompressible.

**Exercice 3.3.** Établir l'équation de quantité de mouvement en coordonnées cylindriques

- pour un fluide en régime permanent,
- pour un fluide incompressible.

**Exercice 3.4.** On considère le champ de vitesse suivant en coordonnées polaires :

$$\left. \begin{array}{l} u_r = a \\ u_\theta = 0 \end{array} \right\} \quad (3.65)$$

où  $a$  est une constante. La masse volumique  $\rho_0$  pour  $r = r_0$  est connue. On suppose le régime permanent. Donner l'expression de  $\rho$  en fonction de la coordonnée radiale  $r$ . En supposant que le mouvement a lieu dans un plan horizontal, déterminer le champ de pression de cet écoulement.

Mêmes questions pour le champ de vitesse suivant :

$$\left. \begin{array}{l} u_r = a / r \\ u_\theta = 0 \end{array} \right\} \quad (3.66)$$

**Exercice 3.5. Modèle de cyclone.** On considère le modèle de cyclone suivant :

- le vecteur vitesse  $\vec{u}$  en tout point M est orthogonal à  $\overrightarrow{OM}$ , où O est l'œil du cyclone ;
- la norme de la vitesse ne dépend que de la distance  $r$  à O ;
- à l'intérieur du cercle de rayon  $R$  (connu), le rotationnel de la vitesse est uniforme, égal à  $\vec{\Omega z}$  ;
- à l'extérieur du cercle de rayon  $R$ , le rotationnel de la vitesse est nul.

Déterminer l'expression du champ de vitesse pour toute valeur de  $r$ .

**Exercice 3.6. Effet Doppler.** Une source sonore, émettant un son à une fréquence  $N$  constante, se déplace à la vitesse  $u$  constante le long de l'axe des  $x$ . La vitesse  $c$  du son dans l'air est constante. Le son se propage à cette vitesse dans le sens des  $x$  positifs et dans le sens des  $x$  négatifs.

- 1) Représenter graphiquement le mouvement de la source sonore dans l'espace des phases (plan  $(x, t)$ ). Représenter également les trajectoires des ondes sonores émises par la source aux dates  $t = 0$  et  $t = T = 1/N$ .
- 2) En déduire la fréquence  $N'$  perçue par un observateur immobile (vous distinguerez le cas où la source s'approche de l'observateur et celui où elle s'en éloigne).
- 3) Application : une ambulance, sirène en marche, roule à  $30 \text{ m.s}^{-1}$ . La vitesse du son dans l'air est de  $330 \text{ m.s}^{-1}$ . De combien de tons la fréquence baisse-t-elle entre le moment où l'ambulance s'approche d'un observateur immobile et celui où elle s'en éloigne ?

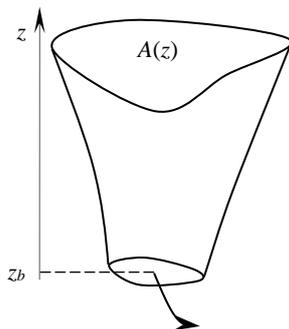
*N.B.* La correspondance entre fréquences et tons de la gamme est logarithmique : monter d'une octave correspond à multiplier la fréquence par 2. Un demi-ton représente donc une multiplication de la fréquence par  $2^{1/12} = 1,0595$ .

**Exercice 3.7.** On considère les champs de vitesse de l'exercice 3.1. En supposant que les forces de pression sont les seules forces s'exerçant sur le fluide (pas de force de pesanteur), et en supposant une masse volumique constante et uniforme, déterminer le champ de pression associé à ces champs de vitesse.

**Exercice 3.8.** Même questions que pour l'exercice précédent, mais pour les champs de vitesse de l'exercice 3.4.

Dans les deux cas, quel est le champ de pression à l'infini ?

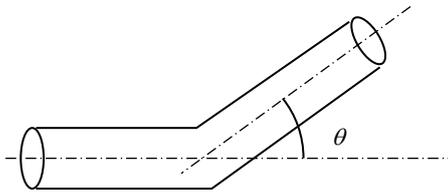
**Exercice 3.9.** Un réservoir se vidange à l'air libre par un trou percé au fond (Figure 3.5). La section du trou est  $S$ , la surface en plan du réservoir est  $A$ . La surface libre du réservoir est à la pression atmosphérique. La loi  $A(z)$ , fonction de la forme du réservoir, est connue. La cote du trou de vidange est notée  $z_b$ .



**Figure 3.5.** Vidange d'un réservoir.

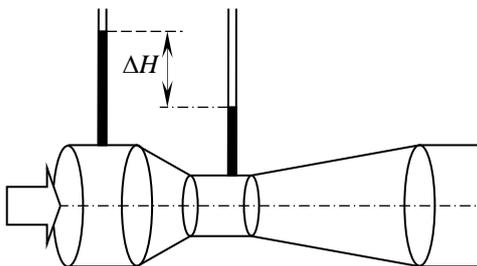
- 1) Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la cote  $z$  de la surface libre du réservoir.
- 2) Déterminer la loi de vidange et la durée au bout de laquelle le réservoir se vide pour les géométries suivantes :
  - \* cylindre de section constante  $A$  ;
  - \* cône d'angle au sommet  $2\theta$ . Le sommet du cône est placé en  $z_b$ .

**Exercice 3.10.** De l'eau circule dans une conduite coudée, de section constante  $A$ , avec un débit  $Q$ . On note  $\theta$  l'angle entre l'axe de sortie et d'entrée de la conduite (Figure 3.6). La conduite est posée à plat sur le sol. En supposant que la vitesse est uniforme sur la section de la conduite, déterminer l'effort exercé sur la conduite.



**Figure 3.6.** Ecoulement dans une conduite coudée.

**Exercice 3.11.** Un tube Venturi est un appareil de section variable destiné à mesurer le débit dans un écoulement.



**Figure 3.7.** Venturi.

On note  $A_0$  et  $A_1$  les sections pleine et contractée du Venturi. On relève les piézométries en amont du Venturi et au col. Donner l'expression du débit d'écoulement en fonction de la différence  $\Delta H$  des piézométries.

Application numérique : diamètres  $d_0 = 80$  mm,  $d_1 = 50$  mm,  $\Delta H = 100$  mm. On prendra  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup>.

**Exercice 3.12.** On considère le champ de vitesse (3.63), rappelé ci-dessous :

$$\left. \begin{array}{l} u = \cos \omega t \\ v = \sin \omega t \end{array} \right\}$$

- 1) En supposant que le fluide est incompressible (masse volumique  $\rho$  uniforme dans l'espace et constante dans le temps) et que la vitesse angulaire  $\omega$  est constante, donner l'expression du champ de pression.
- 2) Représenter sur un même schéma le champ de vitesse et le gradient de pression. Que remarque-t-on ? Donner une explication physique.

**Exercice 3.13.** On considère le champ de vitesse (3.64), rappelé ci-dessous :

$$\left. \begin{array}{l} u = -\omega y \\ v = \omega x \end{array} \right\}$$

- 1) En supposant que le fluide est incompressible (masse volumique  $\rho$  uniforme dans l'espace et constante dans le temps) et que la vitesse angulaire  $\omega$  est constante, donner l'expression du champ de pression.
- 2) Représenter sur un même schéma le champ de vitesse et le gradient de pression. Que remarque-t-on ? Donner une explication physique.

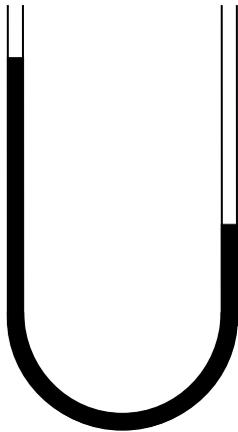
**Exercice 3.14.** On reprend l'exercice 2.11, mais en se plaçant dans un repère fixe.

- 1) Donner l'expression des vitesses  $u$  et  $v$  dans le cas d'une vitesse de rotation  $\omega$  constante (*N.B.* : il peut être utile de revoir l'exercice 3.1 !)

- 2) Donner l'expression du gradient de pression qui permet d'obtenir ce champ de vitesses.
- 3) En reliant la pression dans l'eau à la hauteur d'eau dans le récipient, en déduire l'expression du gradient de hauteur d'eau.
- 4) En déduire l'inclinaison de la surface libre.

**Exercice 3.15.** On place un liquide dans un tube en U (Figure 3.8). En inclinant ce tube puis en le bouchant avec un doigt, on s'arrange pour que les niveaux de liquide dans chacune des deux parties du tube soient différents. Puis on débouche la moitié du tube où le liquide était le plus bas. Le niveau se met donc à osciller dans le tube.

- 1) En supposant que le frottement contre la paroi du tube est négligeable, écrire l'équation différentielle satisfaite par les niveaux dans les branches du tube ;
- 2) Résoudre cette équation. Montrer que le mouvement est périodique et donner la période d'oscillation en fonction de l'accélération de la pesanteur, la masse volumique du liquide s'il y a lieu, la différence de cote initiale entre les deux niveaux, *etc.*



**Figure 3.8.** Liquide en déséquilibre dans un tube en U.

**Exercice 3.16.**



## Chapitre 4

# Ecoulement des fluides réels

### Objectifs du chapitre

A la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir :

- 1) définir en vos propres termes la notion de contrainte ;
- 2) écrire les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes ;
- 3) résoudre ces équations pour des configurations simples d'écoulement, comme l'écoulement laminaire entre deux plaques planes ou dans un tube circulaire ;
- 4) déterminer si un écoulement est laminaire ou turbulent et indiquer ce que cela implique pour la relation entre perte de charge et vitesse.

### 4.1 Contrainte

#### 4.1.1 La notion de contrainte – tenseur des contraintes

**Définition.** On rappelle la définition de la contrainte donnée au chapitre 1 (cf. 1.3.2) : une contrainte est une force surfacique s'exerçant à l'intérieur ou à la périphérie d'un système.

La force élémentaire  $\vec{dF}$  exercée sur une surface élémentaire  $dS$ , de vecteur normal  $\vec{n}$ , se définit de la façon suivante :

$$\vec{dF} = \overline{\overline{M}} \vec{n} dS \quad (4.1)$$

où la matrice  $\overline{\overline{M}}$  est appelée le tenseur des contraintes.

**Symétrie du tenseur des contraintes.** En deux et en trois dimensions d'espace, le tenseur des contraintes s'écrit respectivement :

$$M = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \quad (2D) \quad (4.2a)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} \\ m_{yx} & m_{yy} & m_{yz} \\ m_{zx} & m_{zy} & m_{zz} \end{bmatrix} \quad (3D) \quad (4.2b)$$

En considérant un élément infinitésimal  $dx \times dy$  (en 2D) et  $dx \times dy \times dz$  (en 3D) et en écrivant l'équilibre des moments sur ce volume, on montre facilement que le tenseur des contraintes est symétrique, c'est à dire :

$$\left. \begin{array}{l} m_{xy} = m_{yx} \\ m_{xz} = m_{zx} \\ m_{yz} = m_{zy} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Démonstration en 2D : on considère l'élément  $dx \times dy$ . Les vecteurs normaux des 4 faces sont donnés par (Figure 4.1) :

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{n}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

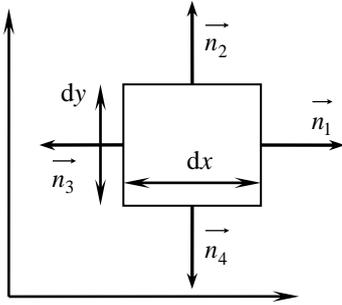


Figure 4.1. Élément  $dx \times dy$ .

Les forces qui s'exercent sur ces 4 faces sont :

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{F}_1 = \vec{M} \vec{n}_1 dy &= \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dy = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yx} \end{bmatrix} dy \\
 \vec{F}_2 = \vec{M} \vec{n}_2 dx &= \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} m_{xy} \\ m_{yy} \end{bmatrix} dx \\
 \vec{F}_3 = \vec{M} \vec{n}_3 dy &= \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dy = -\begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yx} \end{bmatrix} dy \\
 \vec{F}_4 = \vec{M} \vec{n}_4 dx &= \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dx = -\begin{bmatrix} m_{xy} \\ m_{yy} \end{bmatrix} dx
 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

La somme des moments par rapport au centre de l'élément est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= \frac{dx}{2} \vec{e}_x \times (\vec{F}_1 - \vec{F}_3) + \frac{dy}{2} \vec{e}_y \times (\vec{F}_2 - \vec{F}_4) \\
 &= \frac{dx dy}{2} 2(m_{yx} - m_{xy}) \vec{e}_z
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ce moment total est nécessairement nul, sinon le volume se mettrait à tourner sur lui-même de plus en plus vite jusqu'à atteindre une vitesse de rotation infinie. On a donc

$$m_{xy} = m_{yx} \quad (4.7)$$

ce qui est la première égalité (4.3).

#### 4.1.2 Contrainte de viscosité – fluides Newtoniens

**Définitions.** On introduit les définitions suivantes :

– les taux de déformation :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

– les taux de dilatation

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.9)$$

Ces deux définitions s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.10)$$

**Fluide Newtonien.** Un fluide Newtonien est un fluide où la contrainte est une fonction linéaire du taux de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (4.11)$$

où  $p$  est la pression,  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.12)$$

et  $\tau_{ij}$  est la contrainte de cisaillement, donnée par :

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \eta \delta_{ij} \text{Div} \vec{v} \quad (4.13)$$

où  $\eta$  et  $\mu$  sont respectivement la viscosité dynamique de dilatation et la viscosité dynamique de cisaillement.

## 4.2 Equations de Navier-Stokes

### 4.2.1 Equations générales

**Hypothèses.** Les équations de Navier-Stokes sont valables sous les hypothèses suivantes :

- fluide Newtonien ;
- écoulement incompressible (= à divergence nulle)

**Equations générales.** On a vu la définition générale du tenseur de contraintes au 4.1. En introduisant les définitions (4.11–13) dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et en faisant l'hypothèse de divergence nulle, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique, alors que  $\mu$  est la viscosité dynamique.

### 4.2.2 Écoulement visqueux unidimensionnel

**Écoulement permanent entre deux plaques planes.** Dans le cas de l'écoulement unidimensionnel permanent dans la direction  $x$  entre deux plaques planes situées en  $z = 0$  et  $z = L$ , les équations se simplifient en :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

A noter que la première équation vient de l'hypothèse d'écoulement unidimensionnel, la seconde vient de la continuité et de l'incompressibilité du fluide.

On considère que les deux plaques bougent l'une par rapport à l'autre ; la vitesse de celle du bas est nulle ( $u = 0$  pour  $z = 0$ ) alors que la vitesse de la plaque supérieure est égale à  $U$  ( $u = U$  pour  $z = L$ ).

Les deuxième et troisième équations (4.15) donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{Cste} \quad (4.16)$$

Donc, en intégrant la troisième équation par rapport à  $z$  :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z + a \quad (4.17)$$

Le profil de vitesse est donc de la forme :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + az + b \quad (4.18)$$

D'après les conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = L$  :

$$\left. \begin{array}{l} b = 0 \\ \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} L^2 + aL + b = U \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Donc

$$a = \frac{U}{L} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} L \quad (4.20)$$

D'où, en remplaçant dans la forme générale (4.18) :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z - L)z + \frac{z}{L} U \quad (4.21)$$

La vitesse moyenne est donnée par :

$$\bar{u} = \frac{1}{L} \int_0^L u(z) dz = \frac{U}{2} - \frac{L^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.22)$$

**Écoulement dans un tube à section circulaire.** Cet exercice est traité en TD.

## 4.3 Turbulence – Equations de Reynolds

### 4.3.1 Les équations

Dans le cas où l'écoulement est rapide, on constate expérimentalement que le champ des vitesses est instable et subit des fluctuations très rapides : il s'agit de la turbulence. Dans ce cas, les solutions des équations de Navier-Stokes ne sont plus valables pour le champ de vitesses instantané, mais seulement pour le champ de vitesses moyen. On écrit le champ de vitesses de la manière suivante :

$$\left. \begin{array}{l} U = u + u' \\ V = v + v' \\ W = w + w' \\ P = p + p' \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

où les quantités sans apostrophe indiquent les valeurs moyennes, autour desquelles fluctuent les vitesses, pressions, etc., et les apostrophes indiquent les fluctuations autour de ces valeurs moyennes. Par définition, la moyenne au cours du temps des fluctuations est nulle. En écrivant que  $U$ ,  $V$ ,  $W$  et  $P$  sont aussi des solutions des équations de Navier-Stokes, on obtient, pour la première équation (4.14) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(u + u')}{\partial t} + (u + u') \frac{\partial(u + u')}{\partial x} + (v + v') \frac{\partial(u + u')}{\partial y} + (w + w') \frac{\partial(u + u')}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + p')}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2(u + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(u + u')}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \\
 & + v \frac{\partial u}{\partial y} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \\
 & + w \frac{\partial u}{\partial z} + w' \frac{\partial u}{\partial z} + w' \frac{\partial u}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \\
 & = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right) \\
 & + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

En moyennant cette équation, en se rappelant que par définition la moyenne de  $u'$  est nulle :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 &- \left( \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

où la barre supérieure dénote la moyenne. A noter que la quantité entre parenthèses s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
 \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} &= \sum_i \overline{u_i' \frac{\partial u'}{\partial x}} \\
 &= \sum_i \frac{\partial \overline{(u_i' u')}}{\partial x} - \overline{u_i' \frac{\partial u}{\partial x}} \\
 &= \sum_i \frac{\partial \overline{(u_i' u')}}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

On parvient ainsi à :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 &- \left( \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

En reproduisant ce raisonnement pour  $v$  et  $w$ , on parvient à la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{\text{Grad}(u^2)} + \overline{\text{Rot}(\vec{u})} \times \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \overline{\text{Grad}p} + v \overline{\Delta u} - \vec{C} \tag{4.28}$$

où le vecteur convection turbulente  $\vec{C}$  est donné par

$$C_i = \sum_j \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} \tag{4.29}$$

avec  $\overline{R}$  tenseur de Reynolds, donné par :

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \tag{4.30}$$

Si l'on suppose que les fluctuations  $u'$  sont proportionnelles à la vitesse  $u$ , on obtient une perte d'énergie proportionnelle au carré de la vitesse du fluide. C'est la raison pour laquelle, en écoulement turbulent, on postule une perte de charge proportionnelle à  $u^2$ , contrairement au régime laminaire où la perte de charge est proportionnelle à  $u$ .

### 4.3.2 Régime laminaire/turbulent : le nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est défini de la façon suivante :

$$\text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} \quad (4.31)$$

où  $D$  est la dimension caractéristique de l'écoulement,  $u$  est sa vitesse caractéristique,  $\mu$  et  $\nu$  sont respectivement la viscosité dynamique et la viscosité cinématique,  $\rho$  étant la masse volumique du fluide.

On distingue habituellement les régimes laminaire et turbulent de la façon suivante :

- pour  $\text{Re} < 2000$ , on est en régime laminaire ;
- pour  $\text{Re} > 3.10^3$  à  $10^4$ , on admet généralement que la turbulence est pleinement installée.

## 4.4 Transport passif

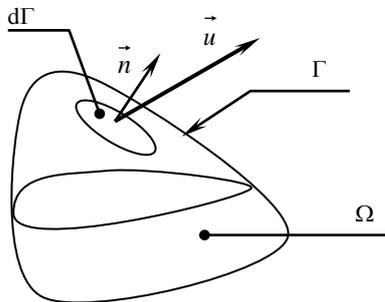
### 4.4.1 Equations sous forme conservative

Cette section introduit les phénomènes de transport de quantités passives (qui n'agissent pas sur l'écoulement). Elle s'applique aux traceurs, aux substances dissoutes à concentration faible, à divers indicateurs de qualité de l'eau comme la demande biologique ou demande chimique en oxygène, *etc.* On fait les hypothèses suivantes :

- le champ de vitesse du fluide qui transporte la substance dissoute est connu, il est indépendant de la concentration  $C$  en substance dissoute ;
- la substance dissoute est transportée en moyenne à la même vitesse que les molécules de fluide ;
- la substance est non réactive : en l'absence d'écoulement, dans un fluide au repos sa quantité totale reste inchangée.

**Forme intégrale.** On établit la forme conservative intégrale en considérant une substance contenue dans le fluide à une concentration  $C$ . La masse totale de substance contenue dans le domaine  $\Omega$  (Figure 4.2) est :

$$m = \int_{\Omega} dm = \int_{\Omega} C \, d\Omega \quad (4.32)$$



**Figure 4.2.** Bilan sur un domaine dans l'espace.

Pendant une durée infinitésimale  $dt$ , la variation de masse à l'intérieur du domaine  $\Omega$  est par définition :

$$dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} C \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \, d\Omega \quad (4.33)$$

Cette variation ne peut être due qu'à un apport de l'extérieur ou à une perte vers l'extérieur du domaine. Ces apports et ces pertes sont dus au transport des molécules au travers de la surface  $\Gamma$  du domaine. On définit le vecteur flux  $\vec{F}$  comme la quantité de substance dissoute qui traverse une surface unitaire de frontière par unité de temps. Avec cette définition, la quantité totale de substance dissoute perdue par la frontière pendant  $dt$  est donnée par :

$$-dm = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (4.34)$$

En substituant (4.33) dans (4.34), on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \quad (4.35)$$

**Forme différentielle.** L'écriture différentielle est obtenue en faisant tendre la taille du domaine  $\Omega$  vers 0. En utilisant la définition de l'opérateur divergence, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{Div } \vec{F} d\Omega = 0 \quad (4.36)$$

ou encore :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \text{Div } \vec{F} \right) d\Omega = 0 \quad (4.37)$$

L'équation (4.37) est valide quel que soit le domaine  $\Omega$ . On a donc en tout point :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{Div } \vec{F} = 0 \quad (4.38)$$

#### 4.4.2 Flux convectif

Dans le phénomène de convection, la substance à concentration  $C$  est entraînée à la vitesse  $\vec{u}$  du fluide. Pour simplifier l'analyse, on commence par considérer la situation unidimensionnelle. L'extension au cas multidimensionnel est vue ensuite.

**Champ de vitesse et de concentration unidimensionnels.** Dans une telle situation, on a :  $\vec{u} = u \vec{x}$  et  $C = C(x, t)$ . On recherche l'expression du flux  $\vec{F} = F_x \vec{x}$ . Deux configurations sont possibles :

- cas  $u \geq 0$  : la substance transportée vient de la gauche. Pendant la durée  $dt$ , le volume de fluide passant par l'abscisse  $x$  est compris dans l'intervalle  $[x - u dt, x]$ . La concentration moyenne de la substance contenue dans ce volume est la concentration au centre de gravité du volume (situé en  $x - u dx/2$ ). La masse de substance qui va passer en  $x$  entre  $t$  et  $t + dt$  est donc égale à :

$$\begin{aligned} dm &= C(x - u dt / 2) u dt = \left[ C(x) - u \frac{dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \right] u dt \\ &= \left[ uC(x) - \frac{u^2 dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \right] dt \xrightarrow{dt \rightarrow 0} uC(x) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Or, par définition, cette masse est aussi égale à  $F_x dt$ . On a donc

$$F_x = uC \quad (4.40)$$

- cas  $u \leq 0$  : la substance transportée vient de la droite. On reproduit le raisonnement ci-dessus, en notant que dans ce cas, les particules passent en  $x$  de la droite vers la gauche. La quantité  $dm$  est donc égale à l'opposé du flux. Il est facile de vérifier que dans ce cas, on obtient également l'équation (4.40).

**Généralisation à plusieurs dimensions d'espace.** En reproduisant le raisonnement unidimensionnel sur une section arbitrairement orientée dans l'espace, on vérifie que le flux est donné par :

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uC \\ vC \\ wC \end{bmatrix} = \vec{u} C \quad (4.41)$$

#### 4.4.3 Flux diffusif

Les flux diffusifs sont classiquement associés au mouvement Brownien des particules de substance transportée. Le mouvement Brownien est dû à l'agitation moléculaire de fluide, qui applique aux particules de substance transportée des forces aléatoires. Ces forces sont nulles (au sens vecteur) en moyenne. Les accélérations des molécules de substance dissoute sont donc également nulles (au sens vecteur). En considérant un grand nombre de particules soumises au mouvement Brownien et en étudiant les propriétés statistiques de leurs mouvements, Einstein (1905) et Langevin (1908) ont démontré que le déplacement moyen des particules au cours du temps était nul, mais que la somme des carrés des déplacements des particules (la variance) était proportionnelle au temps. Einstein (1905) a par ailleurs montré que l'hypothèse d'un mouvement Brownien permettait de retrouver la loi de Fick, qui n'était alors admise jusqu'alors que sous forme expérimentale. Son raisonnement est reproduit ci-dessous.

**Flux diffusif dans la configuration unidimensionnelle.** On considère à nouveau le cas  $C = C(x, t)$ . La vitesse moyenne des molécules est nulle ( $u = 0$ ). Cependant, à cause du mouvement Brownien, les molécules de fluide ne sont pas immobiles : à chaque date  $t$ , on trouve autant de molécules se déplaçant dans la direction des  $x$  positifs que de molécules qui se déplacent dans la direction des  $x$  négatifs. Si l'on nomme  $a$  la vitesse d'agitation des molécules de fluide, les molécules de substance dissoute qui passent par  $x$  au cours d'un intervalle de temps  $dt$  sont contenues dans :

- un volume  $a dt$ , contenant des molécules à la concentration moyenne  $C(x + a dt/2) = C(x) + a \frac{dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$ , se déplaçant dans le sens des  $x$  négatifs ;
- un volume  $a dt$ , contenant des molécules à la concentration moyenne  $C(x - a dt/2) = C(x) - a \frac{dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$ , se déplaçant dans le sens des  $x$  positifs.

Le flux de diffusion est donc

$$F_x dt = -a dt \left( C(x) + a \frac{dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + a dt \left( C(x) - a \frac{dt}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \right) = -\frac{(a dt)^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4.42)$$

En simplifiant par  $dt$ , on obtient :

$$F_x = -\frac{a^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (4.43)$$

où  $D$  est appelé le coefficient de diffusion.

**Flux diffusif dans la configuration multidimensionnelle.** Dans le cas  $C = C(x, y, z, t)$ , on montre que

$$\vec{F} = -D \begin{bmatrix} \partial C / \partial x \\ \partial C / \partial y \\ \partial C / \partial z \end{bmatrix} = -D \overrightarrow{\text{Grad}} C \quad (4.44)$$

On retrouve bien la loi de Fick.

Dans le cas d'une diffusion anisotrope,  $D$  n'est plus un scalaire : il est remplacé par un tenseur de diffusion.

**Invalidité de la loi de Fick sous forme différentielle.** Les lois (4.43) et (4.44) sont largement admises dans les mondes de l'ingénierie et de la recherche scientifique. Toutefois, elles doivent être utilisées avec précaution. Dans l'absolu, (4.43) et (4.44) ne sont pas valides. En effet :

- elles sont obtenues en faisant tendre l'intervalle de temps  $dt$  vers 0, afin de faire apparaître les dérivées premières de  $C$  dans les développements (4.42), (4.43) ;
- or, si l'on fait tendre  $dt$  vers 0 dans (4.43), cela implique que  $a$  doit tendre vers l'infini (le coefficient  $D$  est un paramètre reflétant une réalité physique, qui est par nature indépendante de  $dt$ , il est donc inchangé quel que soit  $dt$ ). Or, des vitesses infinies ne sont pas physiquement admissibles.

La solution de ce paradoxe est la suivante : la description du mouvement Brownien à l'aide de variables continues n'a de sens que pour des intervalles de temps supérieurs à l'intervalle de temps entre deux collisions de molécules. La forme différentielle des équations est une simple commodité d'écriture.

#### 4.4.4 Equation complète du transport

Dans le cas général, les phénomènes de convection et de diffusion se superposent. Il faut donc ajouter les contributions des flux convectif et diffusif. L'équation complète du transport est alors :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{Div} \vec{F} = 0 \quad (4.45a)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D = \vec{u}C - D \overrightarrow{\text{Grad}} C \quad (4.45b)$$

## 4.5 Tension superficielle

Les phénomènes de tension superficielle sont des phénomènes d'interface. A l'interface entre deux fluides, il apparaît une différence de pression  $\Delta p$  (également appelée « saut de pression »), donnée par la « Loi de Laplace »:

$$\Delta p = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \sigma \quad (4.46)$$

où  $R$  et  $r$  sont les deux rayons de courbure principaux de l'interface et  $\sigma$  est la constante de tension superficielle, ou tension de surface. Dimensionnellement,  $\sigma$  est homogène à une force par unité de longueur.

Ce saut de pression est dû au fait que l'interface est le siège d'une force tangentielle égale à  $\sigma$ . En effectuant un bilan des forces sur une longueur d'interface infinitésimale dans les plans contenant  $r$  et  $R$ , et en faisant intervenir le principe fondamental de la statique, on obtient (4.46).

Lors du contact d'une interface fluide-fluide (par exemple, liquide-gaz, comme de l'eau avec l'air) avec un solide, il apparaît un angle dit « de contact », qui est l'angle entre l'interface fluide-fluide et la surface solide (Figure 4.3). La force  $d\mathbf{F}$  exercée par unité de longueur (dans le plan orthogonal à la figure) est donnée par :

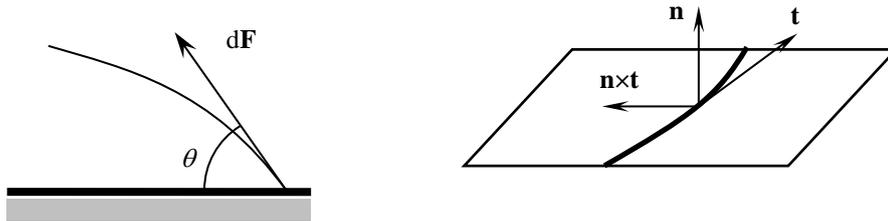


Figure 4.3. Angle de contact. Vue en coupe (gauche), en perspective (droite).

$$d\vec{F} = dl \sigma \left( \sin \theta \vec{n} + \cos \theta \vec{n} \times \vec{t} \right) \quad (4.47)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal au plan solide et  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent à l'interface.  $\mathbf{n} \times \mathbf{t}$  est donc le vecteur tangent au plan dirigé orthogonalement à l'interface.

## 4.6 A retenir

### 4.6.1 Les grandes lignes

Dans les écoulements de fluides réels, des mécanismes dissipateurs d'énergie interviennent. Deux mécanismes principaux sont

- les phénomènes de viscosité, qui occasionnent des pertes d'énergie par le biais de la contrainte de cisaillement. On retrouve ces phénomènes dans les fluides Newtoniens (*cf.* 4.2 équations de Navier-Stokes) ;
- les phénomènes de turbulence, qui sont liés au caractère fluctuant des variables d'écoulement autour de leurs valeurs moyennes. Du fait de la non-linéarité des équations par rapport aux vitesses, des contraintes supplémentaires, faisant apparaître les moyennes des carrés de fluctuations de vitesses, apparaissent dans les équations (contraintes de Reynolds).

Un autre type de phénomène, la tension superficielle, fait apparaître des forces supplémentaires dans les équations au niveau des interfaces entre fluides. La tension superficielle engendre une discontinuité de la pression à l'interface entre deux fluides lorsque cette interface est courbée.

L'agitation moléculaire est responsable, dans le transport de substance, du phénomène de diffusion, que l'on modélise classiquement par la loi de Fick.

### 4.6.2 A savoir absolument

- Les définitions du tenseur des contraintes ;
- la différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique ;
- les équations de Navier-Stokes ;
- les formules des flux convectif et diffusif, l'équation complète du transport ;
- la formule de Laplace.



## Annexe A

# Constantes utiles

## A.1 Masses volumiques

### A.1.1 Solides et métaux

Matériau	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )
Acier	7850
Aluminium	2700
Argent	10500
Béton	2400
Bronze	8400 à 9000
Cuivre	8920
Fonte	6800 à 7500
Mercure	13545
Or	19300
Platine	21450
Plomb	11350
PVC	1400
Verre	2530

### A.2 Liquides

Matériau	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )
Eau	1000
Eau de mer	1030
Essence	750
Gasoil	850
Huile	920

### A.3 Gaz

Matériau	Masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )
Air à 20°C	1,204
Azote (N <sub>2</sub> )	1,250
Eau vapeur (100 °C)	0,598
Hydrogène (H <sub>2</sub> )	0,090

### A.2 Viscosités

Fluide	Viscosité dynamique (kg.m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
Air à 20°C	1,8×10 <sup>-5</sup>
Eau à 20°C	10 <sup>-3</sup>
Hydrogène (H <sub>2</sub> ) à 50°C	9,3×10 <sup>-6</sup>
Huile à 20°C	0,80 à 1,00
Miel	10

## Aide-mémoire

Les formules de base à connaître absolument

Force de pression exercée sur une surface $\Gamma$	$\vec{F} = - \int_{\Gamma} p \vec{n} \, d\Gamma \quad (\text{B.1})$
$\Gamma_x$ , $\Gamma_y$ et $\Gamma_z$ projections de la surface parallèlement aux axes $x$ , $y$ et $z$	$F_x = - \int_{\Gamma_x} p \, d\Gamma_x \quad (\text{B.2a})$
	$F_y = - \int_{\Gamma_y} p \, d\Gamma_y \quad (\text{B.2b})$
	$F_z = - \int_{\Gamma_z} p \, d\Gamma_z \quad (\text{B.2c})$
Champ de pression en hydrostatique	$\overrightarrow{\text{Grad}} p = \rho \vec{g} \quad (\text{B.3})$
Champ de pression dans un fluide incompressible au repos ( $\rho = \text{Cste}$ ). $p_0$ est la pression à l'altitude $z_0$ .	$p = p_0 + (z - z_0)\rho g \quad (\text{B.4})$
Centre de poussée sur une surface	$x_P = \frac{\int_{\Gamma} x p(x, y, z) \, d\Gamma_x}{\int_{\Gamma} p(x, y, z) \, d\Gamma_x} \quad (\text{B.5a})$
	$y_P = \frac{\int_{\Gamma} y p(x, y, z) \, d\Gamma_y}{\int_{\Gamma} p(x, y, z) \, d\Gamma_y} \quad (\text{B.5b})$
	$z_P = \frac{\int_{\Gamma} z p(x, y, z) \, d\Gamma_z}{\int_{\Gamma} p(x, y, z) \, d\Gamma_z} \quad (\text{B.5c})$
Débit à travers une surface $\Gamma$	$Q = \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (\text{B.6})$
Equation de continuité	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \quad (\text{B.7})$
Equation de continuité pour un fluide incompressible	$\int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \quad (\text{B.8})$
	$\text{Div} \vec{u} = 0 \quad (\text{B.9})$
Théorème d'Euler sur un domaine $\Omega$ de frontière $\Gamma$	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\Gamma = \sum_{\Omega} \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \quad (\text{B.10})$
Théorème de Bernoulli	$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g} = \text{Cste} \quad (\text{B.11})$

## Index

Archimède (théorème d').....	11
Baromètre.....	14
— à boule .....	24
Barotrope (fluide).....	10
Bernoulli (théorème de) .....	41
— généralisé.....	42
Charge.....	32
Compressible (fluide).....	10
Continuité (équation de).....	34
Coordonnées .....	3
Courant	
ligne/tube de — .....	32
Déformation (taux de —).....	50
Dérivée Lagrangienne .....	33
Dilatation (taux de —) .....	50
Divergence .....	6
Dynamique	
action et réaction.....	5
principe fondamental de la —.....	5
Emission (ligne d') .....	32
Euler (théorème d').....	39
Forme différentielle .....	39
Gradient .....	6
Hydrostatique (champ de pression).....	12
Incompressible (fluide) .....	11, 36
Laminaire .....	<i>Voir Régime</i>
Laplacien.....	8
Manométrique (hauteur).....	32
Mariotte (vase de) .....	47
Moment	
— renversant .....	20
— stabilisant .....	20
Nabla (opérateur) .....	6
Navier-Stokes (équations de —).....	51
Newtonien (fluide —).....	50
Opérateur différentiel	
Nabla .....	6
Particulaire (dérivée) <i>Voir Dérivée Lagrangienne</i>	
Permanent (régime).....	31
Piézométrie .....	32
Piézométrique (cote —) .....	32
Pitot (tube de).....	47
Poussée (centre de) .....	15, 18
Prandtl (tube de).....	47
Pression.....	9, 32
— étoilée .....	13
— locale .....	13
— manométrique .....	13
— motrice.....	13
force de — .....	10, 15
triangle de — .....	14
PressionPression	
— dynamique .....	32
— étoilée .....	32
— motrice.....	32
Régime	
— laminaire .....	54
— turbulent.....	54
Reynolds	
equations de — .....	53
nombre de — .....	54
Rotationnel.....	7
Trajectoire.....	31
Transitoire (régime) .....	31
Turbulence .....	53
Turbulent.....	<i>Voir Régime</i>
Venturi .....	46