

STE3 2019/20 - MdF - Examen n°2

Durée. 1h30.

Documents autorisés. Formulaire A4 recto-verso + calculatrice.

Compétences examinées dans cet examen. Les compétences évaluées figurent dans le tableau ci-dessous.

- Compétence B (Basique) : un savoir-faire standard, acquis au cours de la matière ou auparavant, qui implique l'application directe de formules et/ou de définitions.
- Compétence M (Méthodologique) : la capacité à poser un problème en des termes qui rendent possible sa résolution, à choisir les outils qui permettent de le résoudre et à les enchaîner correctement.

n°	Type	Compétence
1	B	Expliquer un raisonnement de façon claire et concise, avec une syntaxe et une orthographe correctes
2	B	Faire une application numérique
3	B	Calculer un débit volumique et/ou massique à partir du champ de vitesse, ou inversement
4	B	Intégrer le champ de pression connu sur une surface quelconque pour en tirer la force de pression
5	B	Déterminer un champ de pression dans un fluide statique dont la masse volumique obéit à une loi connue de l'altitude
6	B	Déterminer si un écoulement est compressible ou incompressible
7	B	Calculer les trajectoires ou les lignes de courant dans un fluide à partir du champ des vitesses
8	M	Mettre en oeuvre les principes de l'hydrostatique pour mesurer indirectement une pression (<i>ex.</i> baromètre ou manomètre)
9	M	Mettre en oeuvre de façon conjointe les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et/ou de l'énergie pour déterminer la distribution de la pression, de la masse volumique et/ou des vitesses dans un écoulement de fluide parfait
10	M	Calculer la force exercée sur une surface par un fluide (parfait ou non) en mouvement
11	M	Déterminer les variations de la masse volumique dans un écoulement le long d'une ligne de courant ou d'une trajectoire

1 Injection radiale d'air au voisinage d'une surface plane

On considère une surface plane horizontale au-dessus de laquelle on vient placer un dispositif d'injection d'air (Figure 1). Ce dispositif est formé d'un disque, de rayon extérieur R , que l'on place à une distance h de la surface. L'air est injecté au centre du disque par un orifice de rayon r_0 . On fait les hypothèses suivantes :

- le régime est permanent, l'écoulement est parfait (pas de dissipation d'énergie par frottement),
- le fluide est incompressible, de masse volumique ρ ,
- sous le disque, l'écoulement est purement radial horizontal, il ne dépend que de la distance r à l'axe vertical. La pression et la masse volumique ne dépendent donc pas de la coordonnée verticale z ,

- la distance verticale h étant très petite par rapport au rayon R , on peut considérer que la pression ne dépend que de r et ne dépend pas de z ,
- l'air sort à la limite extérieure du disque à la pression atmosphérique p_{atm} . La pression atmosphérique règne également au-dessus du disque et partout autour du dispositif.

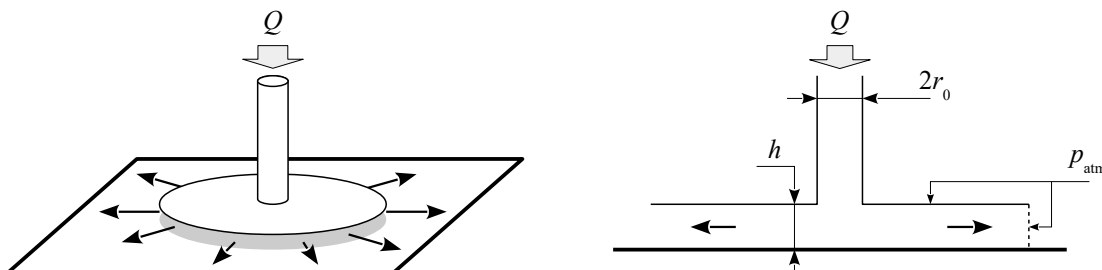


FIGURE 1 – Dispositif d'injection circulaire. Gauche : vue en perspective. Droite : vue en coupe verticale.

1. Donner l'expression de la vitesse radiale u_r en fonction du débit volumique Q , de la distance r à l'axe et de la distance h entre le disque et la surface horizontale.
2. Donner l'expression de la pression $p(r)$ dans le fluide en fonction de $g, h, p_{\text{atm}}, Q, r, \rho$, où g est l'accélération de la pesanteur.
3. En tirer l'expression de la force de pression verticale s'exerçant sur le disque. Attention :
 - (a) la pression atmosphérique règne sur la face supérieure du disque,
 - (b) le disque s'étend de r_0 à R uniquement.
4. Compte tenu de la direction et du sens de la force de pression, que se passe-t-il sur le plan physique ? Remarque : il suffit de répondre à la question 2 pour conclure.
5. Application numérique : $h = 1 \text{ mm}$, $r_0 = 2 \text{ mm}$, $R = 10 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$.

2 Baromètre à deux liquides

Ce problème a déjà été donné en examen et figure dans le polycopié de MdF.

Un baromètre à deux liquides (incompressibles) est construit de la façon suivante :

- deux réservoirs sont reliés entre eux par un tube. Le réservoir de gauche (Figure 2) est fermé, le réservoir de droite est à l'air libre, donc à la pression atmosphérique ;
- la partie gauche du tube est remplie avec le liquide 1, de masse volumique ρ_1 . La partie droite est remplie avec le liquide 2, de masse volumique ρ_2 . Dans le réservoir de gauche, le vide est fait au-dessus de la surface libre du liquide 1 (donc $p = 0$). Les altitudes des surfaces libres sont notées z_1 et z_2 . Elles ne sont pas nécessairement identiques. ρ_1 et ρ_2 ont des valeurs voisines ;
- sous l'effet des variations de pression atmosphérique, l'altitude Z de l'interface entre les deux liquides varie. Les réservoirs ont des surfaces en plan suffisamment importantes pour que les niveaux des surfaces libres des deux liquides puissent être considérés comme constants, même lorsque l'interface se déplace ;
- le baromètre est étalonné de la façon suivante : un jour où la pression atmosphérique est égale à une pression p_0 connue (par exemple, 1 bar), on repère l'altitude Z_0 de l'interface entre les deux liquides.

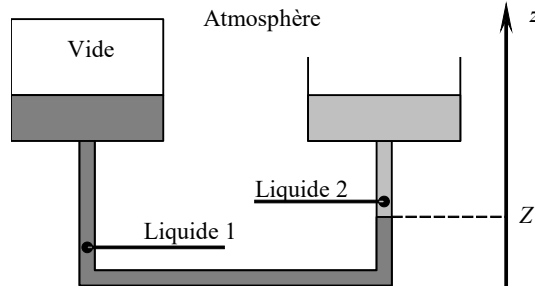


FIGURE 2 – Baromètre à deux liquides. Schéma de principe. N.B. : Z (majuscule) désigne l'altitude de l'interface, z (minuscule) désigne la coordonnée verticale.

1. Donner l'expression de la pression $p_1(z)$ dans le liquide 1 en fonction de z_1 , de l'altitude z du point considéré, de ρ_1 et de g .
2. Même question pour $p_2(z)$ dans le liquide 2 en fonction de z_2 , de l'altitude z du point considéré, de ρ_1 , de g et de la pression atmosphérique p_{atm} .
3. Le champ de pression est continu. En particulier, au niveau de l'interface ($z = Z$), on a : $p_1(Z) = p_2(Z)$. En déduire l'expression de la pression atmosphérique en fonction de p_0, Z_0, Z , ainsi que de toute autre donnée que vous estimerez pertinente.
4. En notant que ρ_1 et ρ_2 sont proches, expliquer quel est l'avantage d'un tel dispositif par rapport au baromètre classique à un seul liquide.

3 Champ de vitesses

Le champ de vitesses suivant dans le plan ;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} ax/y \\ -ay/x \end{bmatrix} \quad (1)$$

où a est une constante.

1. Cet écoulement est-il incompressible ou compressible ?
2. Donner l'équation des lignes de courant pour cet écoulement et tracer leur allure dans le plan (x, y) . Remarque : lors de l'intégration de l'équation de la ligne de courant, il peut être utile de poser $K = 1/x_0 + 1/y_0$.
3. Existe-t-il une ligne de courant (ou trajectoire) le long de laquelle la masse volumique soit constante (si oui, donner son équation) ?