

STE3 2018/19 - MdF - Examen n°2

Durée : 1h30.

Moyens autorisés : Calculatrice + aide-mémoire A4 recto-verso, pas de recopie de résultats d'exercices (cours et méthodo uniquement). L'aide-mémoire est à rendre avec votre copie.

Type	Compétence
B	Expliquer un raisonnement de façon claire et concise, avec une syntaxe et une orthographe correctes
B	Faire une application numérique
B	Calculer un débit volumique et/ou massique en fonction du champ des vitesses et de la géométrie de la section concernée
B	Calculer un débit de quantité de mouvement en fonction du champ des vitesses et de la géométrie de la section concernée
B	Donner les composantes du gradient et du Laplacien d'un champ scalaire, de la divergence et du rotationnel d'un champ vecteur
B	Calculer les éléments du tenseur des contraintes pour un fluide visqueux
B	Calculer un champ de vitesses à partir de l'expression du potentiel des vitesses / de la fonction de courant
B	Déterminer un potentiel de vitesse et/ou la fonction de courant à partir de l'expression du champ de vitesse
M	Déterminer une trajectoire ou une ligne de courant à partir de l'expression du champ de vitesse
M	Déterminer les variations de la masse volumique et/ou du champ de vitesses en tout point d'un fluide en utilisant des considérations de conservation de la masse
M	Déterminer la relation entre les variations de la pression et variations de la vitesse/du débit dans un fluide parfait
M	Combiner les principes de conservation de la masse et de la QdM, ou de conservation de la masse et de l'énergie, pour résoudre un problème complet de mécanique des fluides (<i>ex.</i> Venturi, vidange de réservoir, etc.)

TABLE 1 – Compétences.

1 Ecoulement radial

Un écoulement radial se produit dans le plan horizontal. Le champ des vitesses $\mathbf{u}$ est donné par :

$$\mathbf{u} = \frac{K}{r^b} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

où b et K sont des constantes, $\mathbf{e}_r$ est le vecteur radial unitaire.

1. Pour quelle valeur de b l'écoulement est-il incompressible (réponse à justifier) ?

2. On considère le cas $b = 1$. On se place à une distance r_0 connue de l'origine et à une altitude connue z_0 . On mesure une pression p_0 . En supposant que le fluide est parfait, donner l'expression de la pression $p(r, z)$. Attention à bien justifier toutes les hypothèses.

2 Ecoulement bidimensionnel

On considère la fonction de courant suivante dans le plan (x, y) :

$$\psi = Kxy \quad (2)$$

1. Dessiner les lignes de courant dans le demi-plan $x > 0$.
2. Donner l'expression du champ de vitesse $\mathbf{u}(x, y)$.
3. En déduire l'expression du champ potentiel $\phi(x, y)$. Représenter schématiquement les isopotentiels dans le demi-plan $(x > 0)$.
4. Ce champ de vitesse est-il compatible avec l'hypothèse d'un fluide incompressible?
5. En supposant que le fluide est Newtonien, donner l'expression de la contrainte de cisaillement σ_{xy} .

3 Jet d'eau

Un jet d'eau sort à la verticale d'une buse avec une vitesse U . Le débit est constant, donc le régime est permanent. On néglige les frottements du jet contre les molécules de l'atmosphère et on suppose que la vitesse de l'eau est la même en tout point de la section du jet. Dans le jet, la pression est égale à la pression atmosphérique en tout point.

1. Donner l'expression de la hauteur h à laquelle le jet monte dans l'atmosphère.
2. On vous charge de concevoir l'installation. Les paramètres sont la hauteur h à laquelle doit monter le jet et le diamètre D de la buse. Donner l'expression du débit volumique Q qui permet de satisfaire ces spécifications.
3. Application numérique (jet du plan d'eau de l'Hôtel de Région) : $h = 10$ m, $D = 10$ cm.
4. Donner l'expression du diamètre $d(z)$ du jet à une altitude z au-dessus de l'orifice de la buse.
5. Application numérique : $U = 10$ m.s⁻¹, $d(0) = D = 10$ cm, $z = 4$ m.

4 Ecoulement dans une conduite de diamètre variable

De l'eau coule avec un débit Q connu dans une conduite de rayon r variable. Entre $x = 0$ et $x = L$, la conduite s'élargit progressivement selon la loi :

$$r(x) = r_0 + kx, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3)$$

On fait l'hypothèse de régime permanent, d'un fluide parfait incompressible et on néglige dans les calculs les variations d'altitude car la conduite est horizontale et son rayon est faible. Cela signifie en particulier que la pression et la vitesse sont uniformes sur une section de la conduite.

1. Donner l'expression de la vitesse u en fonction de x .
2. Donner l'expression de la pression p en fonction de x et de la pression p_0 en $x = 0$.
3. Donner l'expression du débit de quantité de mouvement en fonction de x .

Annexe

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques.

$$\mathbf{Grad} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Div} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\mathbf{Rot} \mathbf{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z,$$