

STE3 – Cahier de TD de Mécanique des Fluides 2018/2019

| | |
|--|----|
| 1. Hydrostatique | 2 |
| 1.1 Sphère de Magdebourg | 2 |
| 1.2 Corps flottant : automobile..... | 2 |
| 1.3 Glaçon dans un verre d'eau..... | 3 |
| 1.4 Ecluse..... | 3 |
| 1.5 Vanne de barrage | 3 |
| 1.6. Champ de pression hydrostatique pour un fluide compressible | 4 |
| 1.7 Dimensionnement d'une cuve (examen 2012/2013)..... | 4 |
| 1.8 Stabilité de barrage..... | 5 |
| 2. Dynamique des fluides parfaits..... | 7 |
| 2.1 Champs de vitesse et débit | 7 |
| 2.2 Effet Doppler..... | 7 |
| 2.3 Ecoulement incompressible..... | 8 |
| 2.4 Ecoulement en régime permanent | 9 |
| 2.5 Ecoulement en régime transitoire..... | 9 |
| 2.6 Fluide circulant dans un coude..... | 9 |
| 2.7 Vidange de réservoir | 10 |
| 2.8 Aérogisseur | 10 |
| 2.9 Oscillations dans un tube en U..... | 11 |
| 3. Ecoulements réels | 12 |
| 3.1 Ecoulement entre 2 plaques planes (Poiseuille) | 12 |
| 3.2 Viscosimètre de Couette | 12 |

1. Hydrostatique

1.1 Sphère de Magdebourg

En 1657, Otto von Guericke réalisa l'expérience suivante, destinée à prouver l'existence d'une pression atmosphérique. Après avoir assemblé deux hémisphères en métal (Figure 1.1), il en pompa l'air par un robinet.

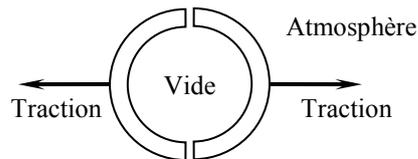


Figure 1.1. Principe des hémisphères de Magdebourg.

L'histoire dit qu'il fallut 16 chevaux pour arriver à séparer les deux hémisphères (*cf.* Figure 1.2). On peut se demander si ce nombre est réaliste ou si les chroniqueurs ont exagéré.

Sachant que le diamètre des hémisphères était de 30 cm environ, quelle est la force que les chevaux ont dû vaincre ?



Figure 1.2. Gravure de Gaspar Schott, *Mechanica Hydraulico-Pneumatica*, Würzburg, 1657.

1.2 Corps flottant : automobile

Le 23 août 2015, un épisode de pluie extrêmement intense a eu lieu sur l'agglomération montpelliéraine. De nombreux axes de voirie ont été submergés. Deux personnes sont décédées par noyade dans leur voiture qui a été emportée par le Verdanson à la traversée d'un pont. L'objectif de ce TD est d'évaluer la vulnérabilité des automobiles à la flottaison en cas d'inondation.

Une voiture est considérée en première approximation comme un parallélépipède de longueur L et de largeur l . La distance du bas de caisse au sol, appelée garde au sol, est notée h_0 . La profondeur d'eau est notée h (Figure 1.3). On suppose la voiture totalement étanche au niveau de la caisse. La masse de la voiture est m et la masse volumique de l'eau est ρ .

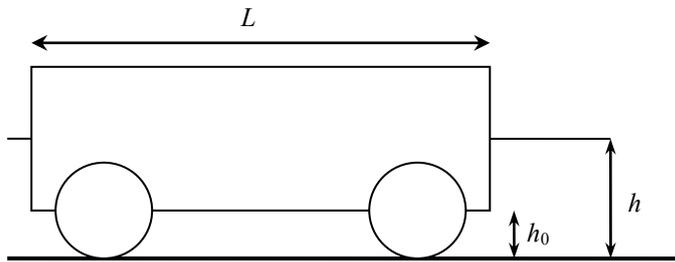


Figure 1.3. Représentation schématique d'une voiture entrant dans l'eau.

- Donner l'expression de la hauteur d'eau h à partir de laquelle la voiture se met à flotter.
- Applications numériques. Masse volumique de l'eau $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.
Voiture citadine: $h_0 = 15 \text{ cm}$, $L = 4 \text{ m}$, $l = 1,7 \text{ m}$, $m = 750 \text{ kg}$.
SUV: $h_0 = 20 \text{ cm}$, $L = 4,6 \text{ m}$, $l = 1,9 \text{ m}$, $m = 1800 \text{ kg}$.

1.3 Glaçon dans un verre d'eau

On place un glaçon dans un verre d'eau. le glaçon flotte. On repère le niveau du liquide dans le verre.

- Après que le glaçon a fondu, quel est le niveau de l'eau dans le verre (identique, plus haut ou plus bas que le repère) ?
- Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un clou ; le clou est suffisamment léger pour que le glaçon flotte.
- Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un bouchon en liège (qui flotte lorsque la glace a fondu).
- Même question si l'on a fait prendre le glaçon autour d'un bout de métal, qui est trop lourd pour que le glaçon flotte.

1.4 Ecluse

Exercice 2.3 du polycopié.

Une écluse est fermée par deux portes de largeur L chacune. Les cotes de la surface libre à l'amont et à l'aval de l'écluse sont respectivement notées h_1 et h_2 (Figure 1.4).

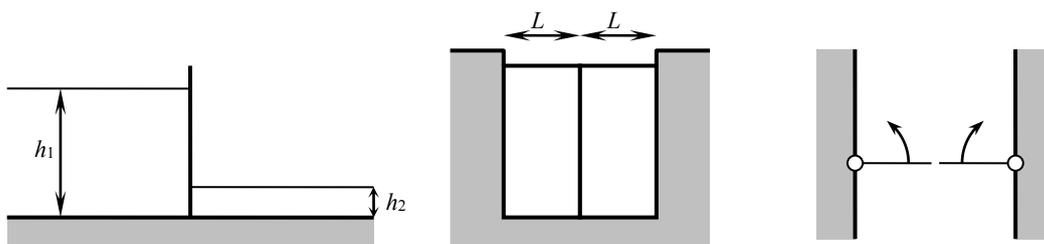


Figure 1.4. Ecluse dans un canal. Coupe longitudinale (gauche), vue de face (centre), vue de dessus (droite).

- Exprimer la force et le moment sur chacune des portes en fonction de h_1 et h_2 , de la masse volumique ρ de l'eau et de l'accélération g de la pesanteur. Convertir la force en masse équivalente (en divisant par g).
- Faire l'application numérique pour les valeurs suivantes : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $h_1 = 4 \text{ m}$, $h_2 = 2 \text{ m}$, $L = 3.5 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

N.B. : l'atmosphère étant présente de chaque côté de la porte, son influence globale est nulle. On conseille donc d'exprimer la pression dans l'eau en prenant la pression atmosphérique pour référence.

1.5 Vanne de barrage

Une vanne de barrage rectangulaire, de hauteur h et de largeur L , est placée à une distance H de la surface de l'eau (Figure 1.5).

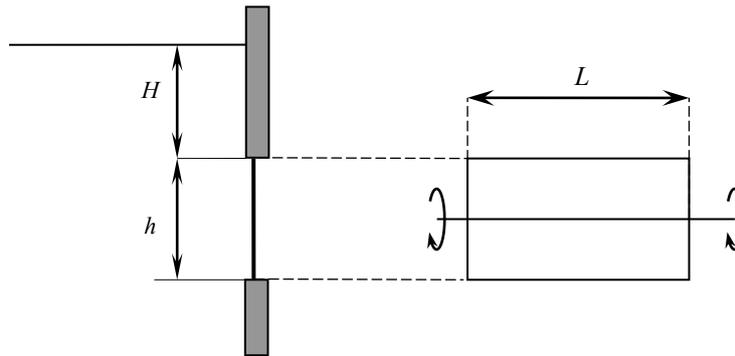


Figure 1.5. Vanne de barrage. Vue en coupe verticale (gauche) et de face (droite). Noter l’axe de pivotement à mi-hauteur.

- Exprimer la force exercée sur la vanne en fonction de ses dimensions, de l’accélération de la pesanteur, *etc.*
- Faire l’application numérique pour $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $H = 4 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $L = 2 \text{ m}$, $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.
- La vanne s’ouvre en pivotant autour d’un axe horizontal situé à $h/2$. Quel est le moment de la force de pression sur la vanne lorsqu’elle est en position fermée ?

1.6. Champ de pression hydrostatique pour un fluide compressible

Déterminer l’expression de la pression atmosphérique en fonction de l’altitude, sachant que la masse volumique de l’air obéit à une loi du type gaz parfait :

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \tag{1}$$

où p , T et ρ sont la pression, la température (K) et la masse volumique de l’air. On suppose généralement que la température décroît linéairement avec l’altitude.

Calculer la pression à $z = 10 \text{ km}$ avec les données du Tableau 1.1.

| Symbole | Signification | Valeur numérique |
|----------|-------------------------------------|-------------------------------|
| p_0 | Pression à $z = 0 \text{ m}$ | $1,013.10^5 \text{ Pa}$ |
| T_0 | Température au niveau de la mer | $20 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| T_1 | Température à $z = 12 \text{ km}$ | $- 50 \text{ }^\circ\text{C}$ |
| ρ_0 | Masse volumique au niveau de la mer | $1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ |

Tableau 1.1. Données du problème.

1.7 Dimensionnement d’une cuve (examen 2012/2013)

Un liquide contenant des matériaux en suspension est stocké dans une cuve conique (Figure 1.6, gauche). Du fait de la décantation des matériaux en suspension, la composition du liquide n’est pas uniforme : la concentration C de matières en suspension varie linéairement de $C = 0$ à la surface à $C = C_f$ au fond de la cuve (Figure 1.6, droite). On note h la hauteur de remplissage de la cuve, ρ la masse volumique du liquide pur et θ le demi-angle au sommet de la cuve.

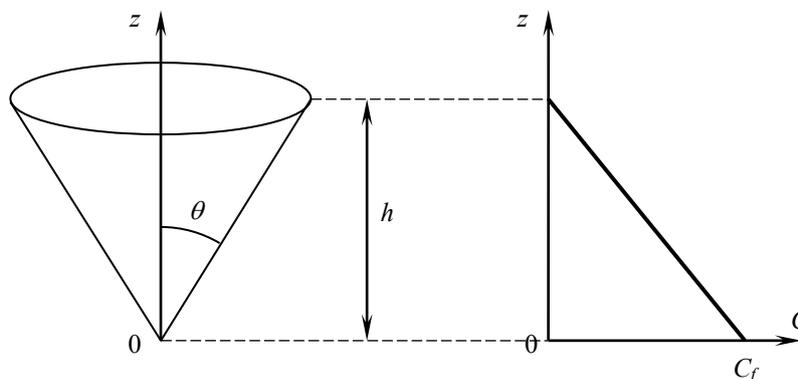


Figure 1.6. Réservoir conique. Gauche : schéma de principe en perspective. Droite : profil de concentration sur la verticale.

- 1) En supposant que la surface libre est à la pression atmosphérique (que l'on prendra comme référence) et que le liquide est au repos, déterminer le profil de pression $p(z)$.
- 2) Calculer la pression au fond de la cuve pour les paramètres donnés dans le Tableau 1.2.
- 3) Donner l'expression de la force exercée par le liquide sur la cuve (on prendra la pression atmosphérique comme référence).
- 4) Calculer cette force pour les paramètres donnés dans le Tableau 2. Etait-il important de prendre en compte la variation de masse volumique liée à la variation de C , ou bien un calcul en utilisant simplement ρ aurait-il suffi ?

| Notation | Signification | Valeur numérique |
|----------|-----------------------------------|--------------------------|
| C_f | Concentration au fond de la cuve | 300 g.L^{-1} |
| g | Accélération de la pesanteur | $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ |
| h | Hauteur de remplissage de la cuve | 5 m |
| ρ | Masse volumique du liquide pur | 10^3 kg.m^{-3} |
| θ | Demi-angle au sommet de la cuve | 45° |

Tableau 1.2. Liquide dans une cuve. Paramètres du problème.

1.8 Stabilité de barrage

On considère un barrage de section longitudinale triangulaire, de hauteur H et de longueur de base L (Figure 1.7). Le matériau constituant le barrage est homogène, de masse volumique ρ_b . La profondeur d'eau en amont du barrage est notée h .

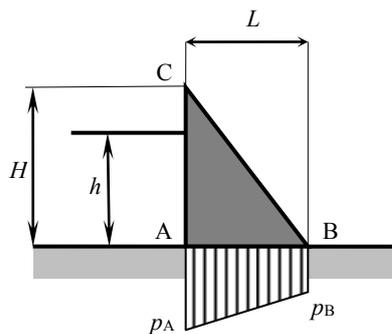


Figure 1.7. Barrage en coupe longitudinale. La zone hachurée sous le barrage représente le profil de pression, supposé linéaire.

Le sol étant faiblement perméable, l'eau peut s'y infiltrer et circuler (à très faible vitesse) sous le barrage. La pression sous ce dernier varie entre p_A à p_B (Figure 1.7). On fera les hypothèses suivantes :

- la pression décroît *linéairement* de p_A à p_B ;
- la pression p_A est égale à la pression au fond juste en amont du barrage ;
- la pression p_B est égale à αp_A , où α est un coefficient connu qui dépend de la nature du sol, de son état de compactage sous le barrage, de la présence d'un éventuel rideau d'étanchéité, etc.

- 1) Faire l'inventaire des différentes forces s'exerçant sur le barrage et exprimer la condition de soulèvement de celui-ci. En déduire une condition sur les dimensions et la nature du matériau du barrage. Cette condition est-elle toujours vérifiée en pratique ?
- 2) Il se peut toutefois que le barrage ne soit pas soulevé verticalement au-dessus du sol mais bascule en pivotant autour du point B. Calculer les moments par rapport au point B des forces s'exerçant sur le barrage et exprimer la condition de non-renversement. A la conception, on adopte en général un coefficient de sécurité β tel que le moment des forces stabilisantes soit égal à β fois le moment des forces renversantes. En déduire l'épaisseur L à donner au barrage pour éviter le basculement.

On fera l'application numérique pour les données du Tableau 1.3.

| Symbole | Signification | Valeur numérique |
|----------|--|--------------------------|
| g | Accélération de la pesanteur | $9,81 \text{ m.s}^{-2}$ |
| H | Hauteur du barrage | 50 m |
| h | Hauteur d'eau dans la retenue | 40 m |
| α | Coefficient donnant p_B en fonction de p_A | 0, puis 1 |
| β | Coefficient de sécurité de conception | 3 |
| ρ | Masse volumique de l'eau | 1000 kg.m^{-3} |
| ρ_b | Masse volumique du barrage | 3500 kg.m^{-3} |

Tableau 1.3. Données pour l'application numérique.

2. Dynamique des fluides parfaits

2.1 Champs de vitesse et débit

Un déversoir est un dispositif de mesure indirecte du débit liquide transitant par des canaux, des cours d'eau, *etc.* Il consiste en un obstacle artificiel au-dessus duquel l'eau se déverse. La Figure 2.1 montre un déversoir dit « proportionnel ». Dans ce qui suit, on utilisera la notation suivante :

- l'origine des cotes est prise au niveau de la crête (le point le plus bas du déversoir) ;
- $L(z)$ désigne la largeur du déversoir à l'altitude z ;
- on note h la hauteur de la surface libre au-dessus de la crête du déversoir (Figure 2.2).

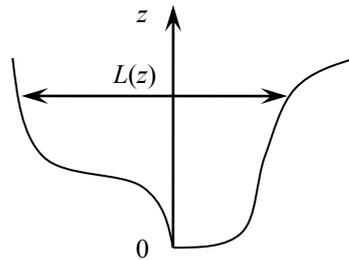


Figure 2.1. Déversoir. Gauche : déversoir proportionnel vu de l'aval. Droite : notation.

On peut montrer que la vitesse de l'eau au droit du déversoir est donnée par (Figure 9) :

$$u(z) = [2g(h - z)]^{1/2} \quad (1)$$

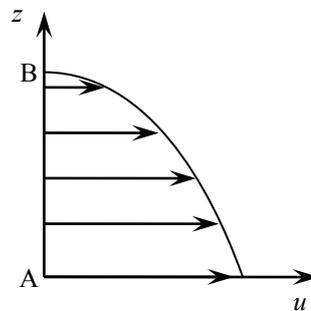
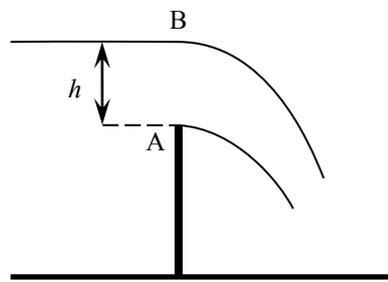


Figure 2.2. Principe du déversoir. Vue de profil (gauche) et champ de vitesse au-dessus de la crête (droite).

- 1) Exprimer le débit volumique Q en fonction de h pour un déversoir rectangulaire de largeur L .
- 2) Donner la formule du débit volumique en fonction de h pour un déversoir triangulaire de demi-angle au sommet θ .
- 3) Quelle devrait être la loi $L(z)$ pour que le déversoir soit proportionnel, c'est-à-dire pour que Q soit proportionnel à h ?

2.2 Effet Doppler

Une source sonore mobile (véhicule avec sirène, avion, *etc.*) se déplace dans la direction de l'axe des x à une vitesse u constante. On note $x_s(t)$ sa position. Les ondes sonores se propagent dans l'air dans toutes les directions de l'espace à une vitesse constante, notée c , qui est indépendante de la vitesse de déplacement de la source sonore (la vitesse du son dans l'air ne dépend que de la température, de la masse volumique et de la pression).

Pour simplifier l'étude du problème, on suppose que :

- la source mobile émet un son à une fréquence N constante ;

- la vitesse de la source selon x , notée u , est constante également. On la suppose positive ;
- on n'étudie la propagation des ondes sonores que dans la direction x . On peut donc considérer qu'il n'y a que deux ondes sonores : l'une se propage à la vitesse c dans le sens des x négatifs, l'autre se propage à la vitesse c dans le sens des x positifs.

On suppose dans un premier temps que $u < c$ (déplacement subsonique)

- 1) Représenter graphiquement, dans le plan (x, t) , le déplacement de la source mobile, en faisant clairement apparaître la vitesse v sur le schéma.
- 2) Représenter graphiquement, sur le même schéma, la propagation de deux ondes sonores émises à deux dates différentes : $t = t_0$ et $t = t_0 + T$, où T est la période de l'onde sonore.
- 3) À l'aide de ce schéma, déduire la fréquence N' perçue par un observateur
 - vers lequel la source est en train de se diriger ($x > x_s$),
 - dont la source est en train de s'éloigner ($x < x_s$).
- 4) Application numérique : une ambulance se déplace à une vitesse de 130 km/h. La fréquence de la sirène est de 440 Hz. La vitesse du son est de 330 m.s⁻¹.
 - 4.1) Quelle est la fréquence perçue par un passant dont l'ambulance est en train de se rapprocher ?
 - 4.2) Quelle est la fréquence perçue par un passant dont l'ambulance est en train de s'éloigner ?
 - 4.3) En musique, une note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par la racine douzième de 2 (puisque une octave = 12 demi-tons, correspond à un doublement de la fréquence). De combien de tons la fréquence perçue baisse-t-elle entre les situations 4.1) et 4.2) ?

On suppose maintenant que $u > c$ (déplacement supersonique). Reprendre les questions 1 à 2.

2.3 Ecoulement incompressible

On pompe dans un plan d'eau de profondeur h uniforme un débit constant Q . Le point de pompage est situé en $(0, 0)$ dans le plan horizontal. Dans la gamme de débits considérés, on peut faire raisonnablement l'hypothèse que la vitesse en un point (x, y) donné est horizontale ($w = 0$) et ne dépend pas de la coordonnée verticale z (Figure 2.3, gauche).

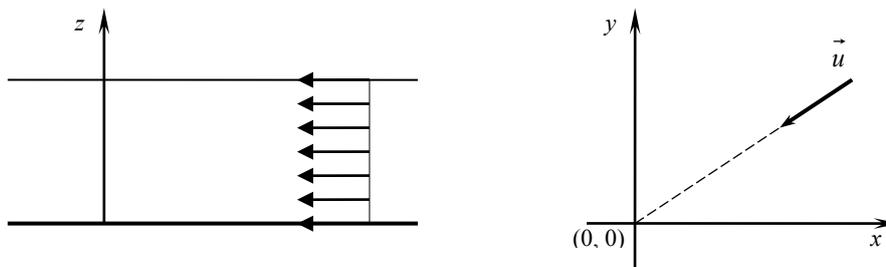


Figure 2.3. Schéma de définition du pompage. Gauche : champ des vitesses uniforme sur la verticale. Droite : symétrie radiale de l'écoulement.

- 1) Déterminer l'expression du vecteur vitesse $[u, v]^T$ en tout point (x, y) du plan d'eau en fonction du débit de pompage Q et de la profondeur h .
N.B. : on notera que le champ des vitesses possède une symétrie radiale, autrement dit les vecteurs vitesse sont tous dirigés vers le point de pompage $(0, 0)$ et ne dépendent que de la distance r à ce point (Figure 10, droite). Par conséquent, il est plus pratique de se placer dans un premier temps en coordonnées polaires pour exprimer la norme de \vec{u} .
- 2) A partir de l'expression des composantes u et v , donner l'expression de la divergence en tout point (x, y) du plan d'eau. Que se passe-t-il en $(0, 0)$?

- 3) On considère un domaine Ω du plan, défini de manière à contenir le point de pompage. Donner l'expression de l'intégrale, sur le domaine Ω , de la divergence du vecteur vitesse. En déduire l'expression de la divergence de \vec{u} en $(0, 0)$.

2.4 Ecoulement en régime permanent

On considère le champ de vitesse suivant en régime permanent :

$$u = a \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (1a)$$

$$v = a \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \quad (1b)$$

$$w = 0 \quad (1c)$$

où a est une constante, supposée connue.

- 1) S'agit-il d'un écoulement compressible ou incompressible ?
- 2) Donner l'expression de la masse volumique ρ en fonction de x , y et z , en indiquant quelles données sont nécessaires pour déterminer $\rho(x, y, z)$ de façon unique.

Remarque : pour simplifier les calculs, il peut être intéressant d'exploiter la symétrie de l'écoulement.

2.5 Ecoulement en régime transitoire

On considère le champ de vitesse suivant :

$$u = \frac{x}{t + t_0} \quad (2a)$$

$$v = 0 \quad (2b)$$

$$w = 0 \quad (2c)$$

- 1) S'agit-il d'un écoulement compressible ou incompressible ?
- 2) Montrer que les trajectoires (2a) sont toutes des droites issues du point $(x = 0, t = -t_0)$ dans le plan (x, t) .
- 3) On suppose que le profil $\rho(x, y, z, 0)$ est connu. Utiliser la question 2) pour déterminer l'expression de la masse volumique ρ en fonction de x, y, z et t .

2.6 Fluide circulant dans un coude

On considère une conduite circulaire de rayon R , dans laquelle un fluide de masse volumique ρ circule avec un débit Q constant. La conduite est coudée, l'angle du coude est noté α (Figure 2.4). La conduite est posée à plat sur le sol. Les pressions à l'amont et à l'aval du coude sont supposées identiques. On considère que la vitesse du fluide est uniforme sur les sections aval et amont.

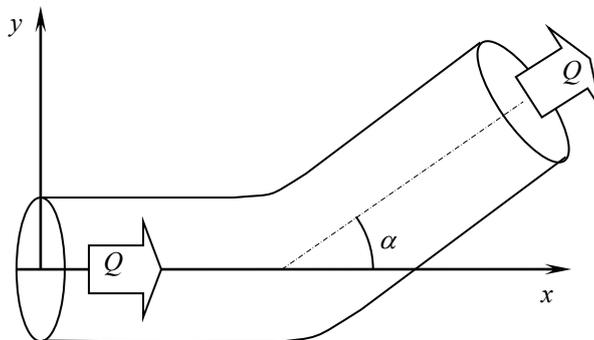


Figure 2.4. Fluide circulant dans une conduite. Vue de dessus.

- 1) Donner l'expression de la poussée (composantes en x et en y) exercée par le fluide sur la conduite. Montrer que cette poussée se décompose en deux forces : une force qui existe sous conditions hydrostatiques, et une force additionnelle qui provient du mouvement du fluide.

2) Faire l'application numérique pour les valeurs données dans le Tableau 2.1.

| Symbole | Signification | Valeur |
|----------|---------------------------|-------------------------------------|
| Q | Débit volumique | $20 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| R | Rayon de la conduite | 5 cm |
| α | Angle de la conduite | 90° |
| ρ | Masse volumique du fluide | $10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ |

Tableau 2.1. Caractéristiques de la conduite et du fluide.

2.7 Vidange de réservoir

Un réservoir se vidange par un orifice de section S percé à sa base (Figure 2.5).

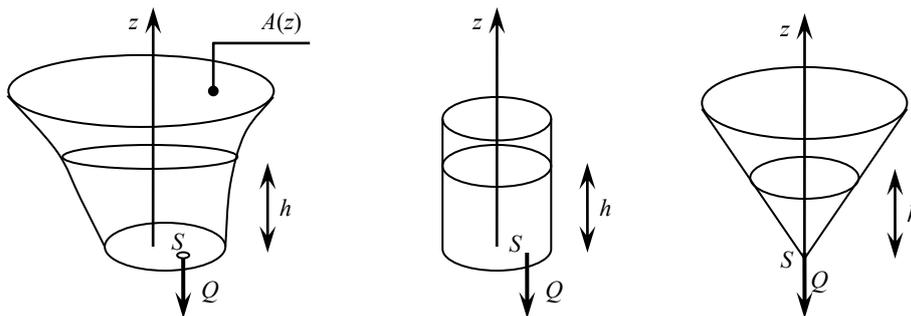


Figure 2.5. Vidange de réservoir. Cas général (gauche), réservoir cylindrique (milieu) et conique (droite).

La géométrie du réservoir est supposée connue, on suppose donc connue la relation $A(z)$ entre sa surface en plan A et la cote z . La surface libre de l'eau ainsi que le jet en sortie du réservoir sont à la pression atmosphérique. On note h la hauteur d'eau (aussi appelée profondeur), c'est-à-dire la distance entre le fond du réservoir et la surface libre. A $t = 0$, la hauteur est égale à h_0 connue.

1) En supposant que la section S de l'orifice est très petite par rapport à la surface en plan A du réservoir, montrer que la hauteur d'eau h obéit à une équation du type :

$$\frac{dh}{dt} = f(h) \quad (1)$$

- 2) On suppose que le réservoir est cylindrique, de rayon R . Résoudre l'équation (1), représenter graphiquement $h(t)$ et donner l'expression de la durée de vidange T du réservoir en fonction de h_0, R, S , etc.
- 3) Mêmes questions si le réservoir est conique, d'angle au sommet 2θ .

2.8 Aéroglesseur

N.B. Ce problème a été posé en examen en 2010.

Le principe de l'aéroglesseur consiste à injecter de l'air à un débit Q sous une cloche, dont les surfaces latérales (appelées jupes) ne sont pas en contact avec le sol (Figure 2.6). L'air est sous pression dans la jupe et s'échappe à la pression atmosphérique par les côtés, entre la jupe et le sol. Pour que l'aéroglesseur puisse se déplacer, il est nécessaire de conserver une distance minimale h (connue) entre le bas de la jupe et le sol. La jupe de l'aéroglesseur peut être schématisée comme un parallélépipède de longueur L et de largeur l . On peut supposer que le volume de la jupe est suffisant pour que l'air injecté y soit considéré au repos. De plus, la hauteur totale de la jupe est suffisamment faible pour que le terme d'altitude soit négligé dans l'expression de la charge.

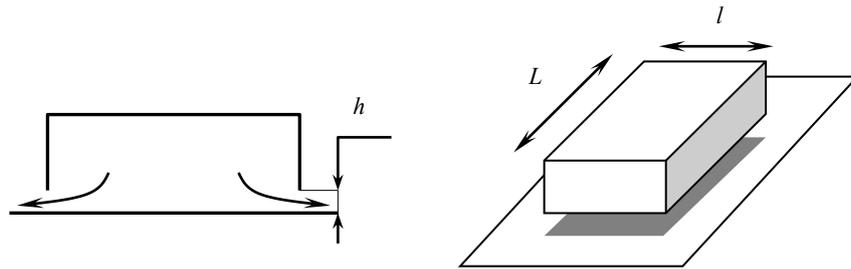


Figure 2.6. Schéma de principe de l'aéroglesseur. Gauche : vue en coupe de la jupe. Droite : vue en perspective.

- 1) Déterminer l'expression du débit d'air Q qu'il faut injecter pour que la hauteur h soit garantie. On notera m la masse de l'aéroglesseur.
- 2) Application numérique : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-1}$, $h = 1 \text{ cm}$, $L = 10 \text{ m}$, $l = 5 \text{ m}$, $m = 10^3 \text{ kg}$, $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$.
- 3) Calculer la puissance (en W) que doivent développer les ventilateurs pour injecter l'air sous la jupe. Comment cette puissance varie-t-elle en fonction de m ?

2.9 Oscillations dans un tube en U

Un tube en U de section uniforme est rempli de liquide (*ex.* de l'eau). Les deux branches du tube sont ouvertes, en contact avec la pression atmosphérique (Figure 2.7). On note L la longueur du tube occupée par le liquide, z_{moy} la cote moyenne du liquide dans le tube et z la cote dans la branche droite. On crée une condition initiale hors équilibre en aspirant le liquide dans la branche droite. A $t = 0$, le liquide est immobile et sa cote initiale dans la branche droite est $z = z_0$. On cesse alors d'aspirer : le liquide se met à osciller dans le tube.

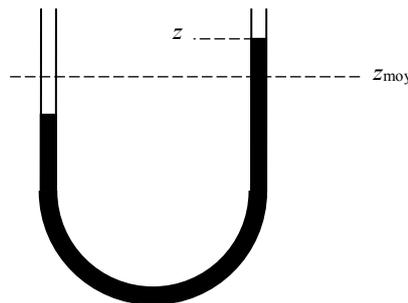


Figure 2.7. Schéma du tube en U.

- 1) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit la cote z . On supposera que le tube est suffisamment lisse pour que les frottements puissent être négligés.
- 2) En résolvant cette équation, montrer que le niveau dans le tube oscille à une période constante que l'on déterminera.

3. Ecoulements réels

3.1 Ecoulement entre 2 plaques planes (Poiseuille)

On considère l'écoulement permanent d'un fluide réel visqueux entre deux plaques planes parallèles séparées par une distance $2L$ (Figure 3.1). Les données du problème sont les suivantes :

- le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression p parallèle à l'axe des x . On suppose donc que la pression ne dépend que de x ;
- par conséquent, on néglige la pesanteur ;
- le fluide est incompressible ;
- les lignes de courant sont parallèles, $v = w = 0$;
- au contact avec chaque plaque, la vitesse du fluide est nulle ($u = 0$ pour $z = \pm L$) ;
- le problème est identique pour tout y , donc u ne dépend pas de y ;
- la viscosité μ du fluide et sa masse volumique ρ sont connues et constantes.

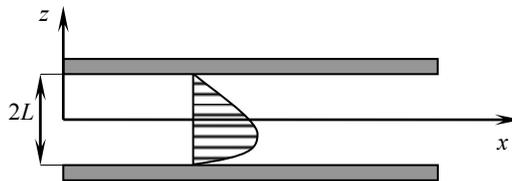


Figure 3.1. Champ des vitesses dans un fluide visqueux entre deux plaques parallèles.

- 1) Montrer que, au vu des hypothèses, u ne dépend pas de x .
- 2) Etablir l'équation liant les composantes de la vitesse à celles du gradient de pression. En déduire l'équation vérifiée par $u(z)$.
- 3) En déduire :
 - a. l'expression de u en fonction de z ,
 - b. l'expression de la contrainte de cisaillement σ_{xz} en fonction de z ,
 - c. l'expression du débit par unité de largeur (dans la direction y) entre les deux plaques,
 - d. l'expression de la vitesse moyenne du fluide entre les deux plaques.
- 4) Montrer que la perte de charge par unité de longueur est proportionnelle au débit circulant entre les plaques, à la distance et inversement proportionnelle à une certaine puissance (que l'on précisera) de la distance entre les plaques.
- 5) Application numérique avec $L = 1 \text{ mm}$ et $\text{Grad } p = 10^4 \text{ Pa.m}^{-1}$
 - pour de l'air : $\mu = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
 - pour de l'eau : $\mu = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
 - pour de l'huile : $\mu = 1,0 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

3.2 Viscosimètre de Couette

Le viscosimètre de Couette permet de mesurer la viscosité d'un fluide. Le dispositif consiste en deux cylindres concentriques de hauteur h , entre lesquels on place le fluide dont on souhaite mesurer la viscosité (Figure 3.2). Le cylindre intérieur, de rayon r_1 , est maintenu immobile, alors que le cylindre extérieur, de rayon r_2 , est en rotation à une vitesse angulaire ω constante. La viscosité du fluide est en relation directe avec le couple d'entraînement du cylindre intérieur par le cylindre extérieur. On mesure ce couple d'entraînement en mesurant le moment qu'il est nécessaire d'appliquer sur l'axe du cylindre intérieur pour le maintenir immobile.

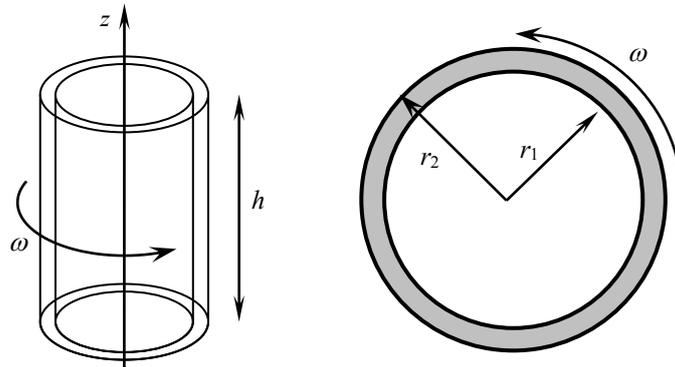


Figure 3.2. Viscosimètre de Couette. Vue en perspective (gauche) et de dessus (droite).

On suppose que la distance $(r_2 - r_1)$ entre les parois des deux cylindres est très petite devant r_1 et r_2 , si bien que dans le repère local tangent au cylindre r_1 , la courbure de l'écoulement est négligeable et le champ des vitesses peut être considéré comme unidimensionnel (Figure 3.3).

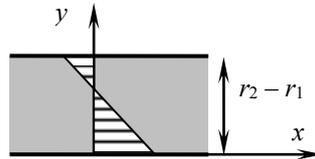


Figure 3.3. Repère local tangent au cylindre r_1 . x : direction tangente, y : direction normale à la paroi du cylindre. Zone hachurée : profil des vitesses.

- 1) Déterminer l'expression des composantes de la vitesse en fonction de x et y (*N.B.* on utilisera les conditions de non-glissement aux parois).
- 2) En déduire l'expression de la contrainte exercée sur le cylindre intérieur (immobile).
- 3) En déduire l'expression du couple (moment) généré par la contrainte de cisaillement sur le cylindre intérieur en fonction de la vitesse angulaire ω , de la viscosité μ du fluide et des dimensions des cylindres.