MMI2 - TD n°3

1 Ecriture vectorielle

Le problème s'écrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{c}, \;\; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Pour résoudre facilement ce problème, il faut découpler les 2 équations. Pour cela, on passe dans la base des vecteurs propres car on sait que, dans celle-ci, le système est diagonal.

2 Expression dans la base des vecteurs propres

1. On commence par déterminer les valeurs propres

$$\lambda_1 = -k_1 \tag{2}$$

$$\lambda_2 = -k_2 \tag{3}$$

2. On en tire les vecteurs propres

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} k_2 - k_1 \\ k_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

   et la matrice des vecteurs propres

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_2 - k_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. On sait que, dans la base des vecteurs propres, le système est diagonal :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{w}, \;\; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \; \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

   et qu'il a pour solution

$$w_1(t) = w_{1,0} \exp(-k_1 t) \tag{8}$$

$$w_2(t) = w_{2,0} \exp(-k_2 t) \tag{9}$$

3 Mise en oeuvre de la solution

On connaît maintenant les expressions de $w_1(t)$ et $w_2(t)$. Pour trouver la solution en fonction des conditions initiales, il faut

— trouver l'expression de $w_{1,0}$ et $w_{2,0}$ en fonction des concentrations initiales $c_{1,0}$ et $c_{2,0}$

— trouver l'expression de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ en fonction de $w_1(t)$ et $w_2(t)$.

On utilise :

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{c} \Longleftrightarrow \mathbf{c} = \mathbf{K}\mathbf{w} \tag{10}$$

Donc

$$\left[\begin{array}{c} c_1(t) \\ c_2(t) \end{array}\right] = \mathbf{K}\left[\begin{array}{c} w_1(t) \\ w_2(t) \end{array}\right] = \mathbf{K}\left[\begin{array}{c} w_{1,0}\exp\left(-k_1 t\right) \\ w_{2,0}\exp\left(-k_2 t\right) \end{array}\right] \tag{11}$$

avec

$$\left[\begin{array}{c} w_1(t) \\ w_2(t) \end{array}\right] = \mathbf{K^{-1}}\left[\begin{array}{c} c_1(t) \\ c_2(t) \end{array}\right] \tag{12}$$

et l'on trouve

$$\mathbf{c} = \left[\begin{array}{c} c_{1,0}e^{-k_1 t} \\ \frac{k_1}{k_2-k_1}c_{1,0}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) + c_{2,0}e^{-k_2 t} \end{array}\right] \tag{13}$$

ATTENTION : cas particulier. Dans le cas $k_2 = k_1 = k$, le dénominateur $k_2 - k_1$ est nul. On effectue alors un développement limité des exponentielles. Après quelques calculs, on obtient :

$$c_2\left(t\right) = \left(kc_{1,0}t + c_{2,0}\right)\exp\left(-kt\right) \tag{14}$$