

Méthodes mathématiques pour l'ingénieur 2

V. Guinot, P. Finaud-Guyot

STE4 2019/2020 - Septembre 2019

Table des matières

1	Algèbre linéaire	5
1.1	Vecteurs	5
1.1.1	Définitions	5
1.1.2	Opérations	5
1.2	Matrices	6
1.2.1	Définitions	6
1.2.2	Opérations	7
1.2.3	Les matrices carrées	7
1.3	Utilisations de la matrice	8
1.3.1	La matrice en tant qu'opérateur	8
1.3.2	La matrice transforme les systèmes de coordonnées	9
1.3.3	La matrice permet d'écrire (et de résoudre) des systèmes d'équations linéaires	10
1.3.4	La matrice permet de résoudre des systèmes non linéaires	11
1.4	Changement de base	12
1.4.1	Base vectorielle	12
1.4.2	Changement de base pour les vecteurs	13
1.4.3	Changement de base pour les matrices	13
1.5	Valeurs propres, vecteurs propres	14
1.5.1	Définitions	14
1.5.2	Expression d'une matrice dans la base de ses vecteurs propres	14
1.5.3	Trace et déterminant	14
1.6	Exercices	15
1.6.1	Inversion de matrice	15
1.6.2	Gestion de projet	15
1.6.3	Brexit et algèbre linéaire	15
1.6.4	Valeurs propres et vecteur propres	15
1.6.5	Transformations du plan	16
1.6.6	Chimie : chaîne de filiation	16
1.6.7	Résoudre une équation différentielle du second ordre en utilisant uniquement des équations du 1er ordre	17
2	Méthodes numériques pour les EDO	18
2.1	Vocabulaire	18
2.2	Principe de la discrétisation aux différences finies	18
2.3	Méthodes d'Euler	19
2.4	Méthodes de Runge-Kutta	20
2.4.1	Méthode RK2	20
2.4.2	Méthode RK4	20
2.5	Consistance, stabilité, convergence	20
2.5.1	Consistance	20
2.5.2	Stabilité	21
2.5.3	Convergence	21

2.6	Exercices	22
2.6.1	EDO d'ordre 1 linéaire	22
2.6.2	EDO non linéaire	22
2.6.3	Filiation/dégradation	22
2.6.4	Hydraulique à surface libre : calcul de ligne d'eau	23
2.6.5	Particule dans un champ de vitesse tournant (examen 2016/17)	23

Le contrat pédagogique

Objectifs

- Après avoir suivi cette matière, les étudiants doivent être capables de
- résoudre (donner la solution analytique) un système de deux équations algébriques ou de deux Équations Différentielles Ordinaires (EDO) du premier ordre ou un système du second ordre en utilisant les outils de l'algèbre linéaire. Exemples de question d'examen : les exercices 1.6.2, 1.6.6 et 1.6.7 ;
 - déterminer et interpréter (géométriquement ou physiquement, selon le problème) les valeurs propres et vecteurs propres d'un système d'EDO ou d'une matrice. Exemple de question d'examen : les exercices 1.6.5, ;
 - proposer des discrétisations (explicites ou implicites) d'EDO ou de systèmes d'EDO, en utilisant au besoin des techniques de linéarisation. Exemples de question d'examen : les exercices du 2.6.

Supports

- Les supports pédagogiques sont
- ce polycopié,
 - les énoncés des examens des années précédentes, en ligne (<http://vincentguinot.free.fr/TeachFr.htm>),
 - le synopsis de la matière, qui contient également des liens vers des suggestions d'exercices pour vous entraîner.

Évaluation

La matière est évaluée par un examen d'1h30. Un formulaire A4 recto-verso et une calculatrice sont autorisés. Les compétences évaluées sont listées dans le Tableau 1. On distingue deux types de compétence.

- Les compétences dites « Basiques » (B). Ce sont les compétences qui sont considérées comme essentielles. Ne pas les maîtriser est rédhibitoire pour la validation de la matière, car elles forment les compétences essentielles, sur lesquelles le reste de la matière s'appuie.
- Les compétences dites « Complémentaires » (C). Ce sont des compétences « de plus haut niveau » que les compétences B. En général, elles demandent de savoir mobiliser dans le bon ordre une série de compétences B. Il est possible de valider la matière même si toutes les compétences C ne sont pas maîtrisées.

Compétence	Nature
Faire une application numérique	B
Utiliser les notions de MMI1 : faire un changement de variable, calculer une dérivée partielle ou totale, utiliser la méthode de Newton, <i>etc.</i>	B
Faire le produit de deux matrices	B
Déterminer si une matrice est inversible	B
Déterminer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice 2×2	B
Inverser une matrice 2×2	B
Discrétiser une EDO d'ordre 1	B
Écrire un système d'équations (algébriques ou différentielles) sous forme matrice-vecteur	B
Déterminer les solutions analytiques d'un système d'EDO	C
Résoudre numériquement un système d'EDO	C
Traduire un problème physique/chimique en un système d'EDO	C
Appliquer le théorème de Lax à une situation concrète pour évaluer la qualité de la solution numérique	C

TABLE 1 – Compétences évaluées par l'examen. B = basique, C = complémentaire.

Les compétences basiques sont en général mobilisées plusieurs fois dans l'examen (par exemple, plusieurs applications numériques). À partir du moment où une compétence B est utilisée correctement au moins une fois, elle est validée. La note N de l'examen est déterminée de la façon suivante :

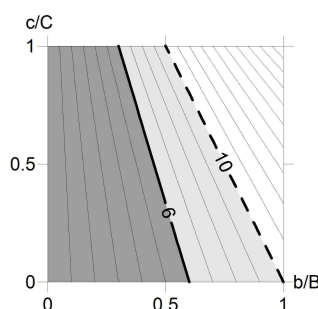
$$N = 20 \frac{b}{B} \frac{1}{2 - \frac{c}{C}} \quad (1)$$

où B et C sont les nombres de compétences basiques et complémentaires présentes dans les questions d'examen, b et c sont les nombres de ces compétences effectivement acquises par l'étudiant(e). Contrairement à la notation standard qui se contente d'additionner des scores de façon purement comptable (et permet de valider la matière même si l'on ignore les notions fondamentales), cette formule donne un poids plus important aux notions de base.

La fonction $N(b, c)$ possède trois propriétés importantes :

- elle est indépendante du ratio B/C ,
- si $b = 0$, alors $N = 0$ quel que soit le score obtenu aux questions complémentaires,
- la matière peut être validée à l'aide des seules notions basiques, même si l'on ne valide aucun des compétences complémentaires. En effet, $(b, c) = (B, 0) \Rightarrow N = 10$.

La Figure 0.1 illustre le comportement de la fonction $N(b, c)$.

FIGURE 1 – Fonction $N(b, c)$.

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Vecteurs

1.1.1 Définitions

Un vecteur de taille m est un ensemble constitué de m valeurs réelles.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (\text{vecteur colonne}) \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \dots v_k \dots v_m] \quad (\text{vecteur ligne}) \quad (1.1b)$$

Dans la plupart des ouvrages, on utilise les caractères gras plutôt que la flèche. La raison en est principalement historique (commodité de typographie). Les u_k ($k = 1, \dots, m$) sont les composantes de $\mathbf{u}$.

1.1.2 Opérations

Addition. On ne peut additionner que des vecteurs de même taille. Ces vecteurs peuvent être des vecteurs lignes ou colonnes. Les composantes s'additionnent deux à deux.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \implies \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Multiplication par un scalaire. Cette opération s'applique à des vecteurs lignes ou colonnes. On multiplie chacune des composantes par le scalaire en question.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \implies a\mathbf{u} = a \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_1 \\ \vdots \\ au_m \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Produit scalaire. Le produit scalaire s'applique uniquement à des vecteurs colonnes de même taille.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \implies \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_m v_m \quad (1.4)$$

Vecteur nul. C'est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles.

Vecteurs colinéaires. Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (on écrit : $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$) sont colinéaires s'il existe un réel a tel que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = a\mathbf{u}$. Cette définition implique que les vecteurs soient de même taille.

Propriétés :

- le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs,
- la colinéarité est transitive pour les vecteurs non nuls : pour trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ non nuls, si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ et $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$, alors $\mathbf{u} \parallel \mathbf{w}$.

1.2 Matrices

1.2.1 Définitions

Matrice. Une matrice $\mathbf{M}$ de taille $m \times n$ est un arrangement de nombres réels sur m lignes et n colonnes :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1j} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \cdots & M_{ij} & \cdots & M_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \cdots & M_{mj} & \cdots & M_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

L'élément M_{ij} est situé par définition sur la ligne i et la colonne j .

Matrice carrée. Une matrice est dite carrée si $m = n$.

Transposée. La matrice transposée s'obtient en intervertissant les lignes et les colonnes :

$$(\mathbf{M}^T)_{ij} = M_{ji} \quad (1.6)$$

Exemple :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \iff \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Matrice symétrique, antisymétrique. Une matrice carrée $\mathbf{M}$ est dite symétrique si $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$. Elle est antisymétrique si $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$.

Matrice diagonale. Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les éléments situés en-dehors de la diagonale sont nuls.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{mm} \end{bmatrix}, \quad i \neq j \implies D_{ij} = 0 \quad (1.8)$$

Elle est nécessairement symétrique.

Matrice identité. La matrice identité, notée en général $\mathbf{I}$ ou $\mathbf{Id}$, est la matrice diagonale qui comporte des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs :

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.9)$$

(δ_{ij} est appelé le symbole de Kronecker).

1.2.2 Opérations

Addition. Les composantes sont additionnées deux à deux. On ne peut additionner que des matrices de mêmes dimensions.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} \quad (1.10)$$

Multiplication par un scalaire.

$$(a\mathbf{M})_{ij} = a\mathbf{M}_{ij} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Produit matriciel. Pour $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ et $\mathbf{B}$ de taille $n \times p$, on a :

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \quad (1.12)$$

- On ne peut multiplier une matrice de taille $m \times n$ que par une matrice de taille $n \times p$. Autrement dit, le nombre de lignes de la 2ème matrice doit être égal au nombre de colonnes de la première.
- Le produit de deux matrices n'est pas commutatif : en général $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
- Cas particulier : le produit matrice-vecteur

$$(\mathbf{Au})_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} u_k \quad (1.13)$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs colonnes peut s'interpréter comme un produit matriciel :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{uv}^T \quad (1.14)$$

car un vecteur colonne est une matrice $m \times 1$.

- Matrice identité :

$$\mathbf{IM} = \mathbf{MI} = \mathbf{M} \quad \forall \mathbf{M} \quad (1.15)$$

Associativité, distributivité.

$$\mathbf{A} \cdot (b\mathbf{B} + c\mathbf{C}) = b\mathbf{AB} + c\mathbf{AC}, \quad (b, c) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.16a)$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (1.16b)$$

1.2.3 Les matrices carrées

Déterminant. Le déterminant se calcule par récurrence.

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} A_{1j} |\mathbf{A}_{1j}| = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} A_{i1} |\mathbf{A}_{i1}| \quad (1.17)$$

où $|\mathbf{A}_{ij}|$ est la matrice $(m-1) \times (m-1)$ obtenue en enlevant de $\mathbf{A}$ tous les éléments de la ligne i et de la colonne j .

- Lorsque l'on permute entre elles deux colonnes ou deux lignes d'une matrice, le déterminant est multiplié par -1 .
- Si une ligne [colonne] est multiple d'une autre ligne [colonne], le déterminant est nul.
- Si une ligne [colonne] est la combinaison linéaire de plusieurs autres lignes [colonnes], le déterminant est nul.

Inverse d'une matrice carrée. L'inverse d'une matrice carrée $\mathbf{M}$ est noté $\mathbf{M}^{-1}$. S'il existe (ce qui n'est pas toujours le cas), il vérifie

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I} \quad (1.18)$$

Pour qu'une matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit non nul.

Propriétés de base. Dans ce qui suit, m est la taille de la matrice.

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (1.19a)$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \quad (1.19b)$$

$$|\mathbf{I}| = 1 \quad (1.19c)$$

$$|\mathbf{M}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \quad (1.19d)$$

$$|k\mathbf{M}| = k^m |\mathbf{M}| \quad (1.19e)$$

$$|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}| \quad (1.19f)$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (1.19g)$$

Inverse d'une matrice, cofacteurs, comatrice. Le déterminant se calcule par la formule suivante :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}_c^T}{|\mathbf{A}|} \quad (1.20)$$

où $\mathbf{A}_c$ est appelée la comatrice de $\mathbf{A}$. Les éléments $(A_c)_{ij}$ de cette comatrice sont appelés les cofacteurs. Les cofacteurs sont construits à partir des matrices $\mathbf{A}_{ij}$ introduites dans le calcul du déterminant (équation (1.17)) :

$$(A_c)_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| \quad (1.21)$$

Ces formules peuvent être employées pour des matrices de petite taille

1.3 Utilisations de la matrice

1.3.1 La matrice en tant qu'opérateur

Une matrice peut être vue comme un outil de transformation des vecteurs. Si on pose $\mathbf{v} = \mathbf{Mu}$, $\mathbf{M}$ est la matrice qui transforme le vecteur $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$. $\mathbf{M}$ est aussi appelée un *opérateur* :

$$\mathbf{u} \xrightarrow{\mathbf{M}} \mathbf{v} = \mathbf{Mu} \quad (1.22)$$

La notion d'opérateur possède un intérêt pratique. Supposons que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ expriment deux transformations connues et que l'on souhaite calculer le résultat de la transformation qui consiste à (i) multiplier le vecteur $\mathbf{u}$ par la matrice $\mathbf{A}$, puis (ii) multiplier le résultat obtenu par la matrice $\mathbf{B}$. Il existe deux possibilités :

1. Appliquer $\mathbf{A}$ à $\mathbf{u}$ dans un premier temps, ce qui donne le vecteur $\mathbf{v}$, puis appliquer $\mathbf{B}$ à $\mathbf{v}$, ce qui donne le résultat final $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{v} \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{w} \quad (1.23)$$

pour chaque nouveau vecteur $\mathbf{u}$ que l'on souhaite transformer, deux multiplications matrice-vecteur successives sont nécessaires.

2. On peut aussi remarquer que $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ et $\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{v}$, donc que

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{u} \quad (1.24)$$

et que la matrice qui exprime la transformation “ $\mathbf{A}$ suivie de $\mathbf{B}$ ” est la matrice $\mathbf{B}\mathbf{A}$. Il suffit de calculer le produit $\mathbf{B}\mathbf{A}$ une fois pour toutes. Pour tout nouveau vecteur $\mathbf{u}$, une seule multiplication matrice-vecteur sera nécessaire.

La deuxième approche permet de gagner beaucoup de temps en calcul scientifique.

1.3.2 La matrice transforme les systèmes de coordonnées

Exemple : dans le plan (x, y) , les deux vecteurs unitaires sont $\mathbf{e}_x = [1, 0]^T$ et $\mathbf{e}_y = [0, 1]^T$. La matrice $\mathbf{M}$ s'écrit dans le cas général $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$.

Si l'on applique l'opérateur $\mathbf{M}$ aux deux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, on obtient deux vecteurs transformés $\mathbf{e}'_x$ et $\mathbf{e}'_y$ (figure 1.1) :

$$\mathbf{e}'_x = \mathbf{M}\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{e}'_y = \mathbf{M}\mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \end{bmatrix} \quad (1.25b)$$

La première colonne de $\mathbf{M}$ est donc le vecteur transformé $\mathbf{e}'_x$, obtenu en appliquant $\mathbf{M}$ à $\mathbf{e}_x$. La deuxième colonne de $\mathbf{M}$ est le vecteur transformé $\mathbf{e}'_y$, obtenu en appliquant $\mathbf{M}$ à $\mathbf{e}_y$.

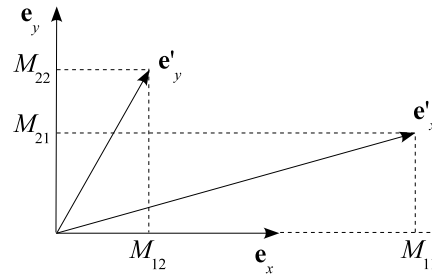


FIGURE 1.1 – Transformation dans le plan des deux vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$.

Un vecteur $\mathbf{u}$ de composantes u_1 et u_2 vérifie $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_x + u_2\mathbf{e}_y$. En appliquant l'opérateur $\mathbf{M}$ à ce vecteur, on obtient :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{M}(u_1\mathbf{e}_x + u_2\mathbf{e}_y) = u_1\mathbf{M}\mathbf{e}_x + u_2\mathbf{M}\mathbf{e}_y = u_1\mathbf{e}'_x + u_2\mathbf{e}'_y \quad (1.26)$$

Autrement dit, les composantes du vecteur sont restées les mêmes (u_1 et u_2), mais le système de coordonnées a changé.

La matrice $\mathbf{M}$ est aussi appelée matrice de passage du système de coordonnées $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ vers le système $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y)$. Quelques matrices particulières sont consignées dans le Tableau 1.1.

Transformation	Matrice
Projection sur x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projection sur y	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Symétrie par rapport à x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Symétrie par rapport à y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Affinité selon x	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Affinité selon y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Rotation d'angle θ	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
Symétrie centrale	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

TABLE 1.1 – Matrices particulières. On remarquera que la projection et la symétrie selon un axe sont des cas particuliers d'affinités

1.3.3 La matrice permet d'écrire (et de résoudre) des systèmes d'équations linéaires

Ces systèmes peuvent être algébriques ou différentiels. L'exemple le plus simple est celui du système algébrique :

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m &= b_i \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m &= b_m
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ce système peut s'écrire de façon plus condensée sous la forme d'un produit matrice-vecteur.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1.28}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

Cette écriture conduit directement à la solution du système : en multipliant par l'inverse de $\mathbf{A}$, on obtient

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{1.30}$$

Le système n'a une solution que si $\mathbf{A}^{-1}$ existe. Une condition nécessaire est donc que le déterminant de $\mathbf{A}$ soit non nul.

On peut noter le parallèle avec une équation à une inconnue :

$$ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b = \frac{b}{a} \quad (1.31)$$

Recommandation : avant d'essayer d'inverser un système d'équations algébriques, toujours commencer par calculer son déterminant ! Si celui-ci est nul, il est inutile de continuer les calculs.

1.3.4 La matrice permet de résoudre des systèmes non linéaires

La méthode. La méthode de Newton-Raphson est une généralisation de la méthode de Newton, dite aussi méthode de la tangente. On cherche à résoudre un système de m équations non linéaires à m inconnues :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_i(x_1, \dots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

où les fonctions $f_1, \dots, f_m$ sont connues, les x_i ($i = 1, \dots, m$) étant à déterminer.

On commence par écrire le système sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.33)$$

et l'on procède à une linéarisation locale de la fonction

$$d\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\mathbf{x} \quad (1.34)$$

où la quantité $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ est une matrice, appelée matrice Jacobienne, dont on verra l'expression plus loin. Comme dans la méthode de Newton, on commence par proposer une valeur initiale $\mathbf{x}^{(0)}$ pour la solution. En général (sauf coïncidence), l'équation ne sera pas satisfaite et l'on aura $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \neq 0$. Dans ce cas, on va essayer de fournir une valeur plus précise $\mathbf{x}^{(1)}$. Pour cela, on applique l'équation (1.34) à la différence $(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)} + (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)})) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) \quad (1.35)$$

Or, on souhaite avoir $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) = 0$. Si l'on applique l'équation ci-dessus, cela implique :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) = 0 \iff \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (1.36)$$

Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ n'est pas jugé suffisamment proche du vecteur nul, on reproduit l'opération. La méthode est itérative, de formule générale :

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)}), \quad \mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(n)}} \quad (1.37)$$

La matrice Jacobienne. La méthode nécessite la détermination de la matrice Jacobienne $\mathbf{J}$. Vu la définition (1.34), on a :

$$\begin{bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_i \\ \vdots \\ df_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & J_{ij} & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_i \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

soit, pour la ligne i :

$$df_i = \sum_{j=1}^m J_{ij} dx_j \quad \forall dx_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.39)$$

Or, par définition de la différentielle et des dérivées partielles, on a aussi :

$$df_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \quad \forall dx_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.40)$$

Par identification, on en tire

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \iff \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_j & \cdots & \partial f_1 / \partial x_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial f_i / \partial x_1 & \cdots & \partial f_i / \partial x_j & \cdots & \partial f_i / \partial x_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \partial f_m / \partial x_1 & \cdots & \partial f_m / \partial x_j & \cdots & \partial f_m / \partial x_m \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

1.4 Changement de base

1.4.1 Base vectorielle

Dans le langage mathématique, on désigne par « base » un ensemble de vecteurs qui permettent d'exprimer n'importe quel vecteur de l'espace où on travaille de façon unique. Par exemple, dans le plan, il suffit de disposer de deux vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ non nuls et non colinéaires pour exprimer n'importe quel vecteur $\mathbf{v}$ sous la forme

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \quad (1.42)$$

avec une combinaison (v_1, v_2) unique. Le couple $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ forme une base du plan. Lorsque l'on travaille sur l'espace physique (des coordonnées spatiales et/ou temporelles), la base est un système de coordonnées. Mais certains espaces vectoriels ne correspondent pas à des coordonnées physiques (voir par exemple l'exercice 2.6.5 : les composantes du vecteur sont des concentrations).

Pour un vecteur de taille m , il faut une base de m vecteurs de taille m :

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^m v_j \mathbf{e}_j \quad (1.43)$$

Cette décomposition peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{v} = v_1 \begin{bmatrix} e_{11} \\ \vdots \\ e_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + v_j \begin{bmatrix} e_{1j} \\ \vdots \\ e_{mj} \end{bmatrix} + \cdots + v_m \begin{bmatrix} e_{1m} \\ \vdots \\ e_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

où e_{ij} est la composante i du vecteur $\mathbf{e}_j$. On peut aussi ranger les vecteurs $\mathbf{e}_j$ côte à côte dans une matrice $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_j \cdots \mathbf{e}_m] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{1j} & e_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{m1} & e_{mj} & e_{mm} \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (1.43) en utilisant le produit matriciel

$$\mathbf{v} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

1.4.2 Changement de base pour les vecteurs

Supposons un vecteur $\mathbf{u}$ connu dans le système de coordonnées $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. On souhaite déterminer l'expression de ce vecteur dans le système de coordonnées $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y)$. La matrice de passage est classiquement notée $\mathbf{P}$ plutôt que $\mathbf{M}$. On note

$$\mathbf{u} = [u_i], \quad \mathbf{u}' = [u'_i] \quad (1.47)$$

Par définition, on a

$$\mathbf{u} = \sum_j u_j \mathbf{e}_j = \sum_j u'_j \mathbf{e}'_j \quad (1.48)$$

Or, d'après l'écriture (1.46), on peut aussi écrire

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e'_{11} & e'_{1j} & e'_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ e'_{m1} & e'_{mj} & e'_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_m \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{u}' \quad (1.49)$$

Donc la formule de changement de base pour les vecteurs est

$$\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{u}' \iff \mathbf{u}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u} \quad (1.50)$$

1.4.3 Changement de base pour les matrices

Supposons une matrice $\mathbf{A}$ connue dans le système de coordonnées $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. On souhaite déterminer l'expression de cette matrice dans le système de coordonnées $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y)$.

Dans le système de coordonnées d'origine, $\mathbf{A}$ transforme $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (1.51)$$

Dans le système de coordonnées d'arrivée, $\mathbf{A}'$ transforme $\mathbf{u}'$ (expression de $\mathbf{u}$ dans $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y)$) en $\mathbf{v}'$ (expression de $\mathbf{v}$ dans $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y)$) :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}' \mathbf{u}' \quad (1.52)$$

Or, d'après (1.50), on a $\mathbf{u} = \mathbf{P} \mathbf{u}'$ et $\mathbf{v} = \mathbf{P} \mathbf{v}'$. Donc :

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \implies \mathbf{P} \mathbf{v}' = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{u}' \quad (1.53)$$

En multipliant cette équation par l'inverse de $\mathbf{P}$, on obtient

$$\mathbf{v}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{u}' \quad (1.54)$$

et en comparant cette égalité avec (1.52), on trouve :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \iff \mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{A}' \mathbf{P}^{-1} \quad (1.55)$$

Invariance de la trace et du déterminant. La trace et le déterminant sont des invariants par changement de base. En effet, on démontre que

$$|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}| \quad (1.56a)$$

$$\text{tr} \mathbf{A}' = \text{tr} \mathbf{A} \quad (1.56b)$$

1.5 Valeurs propres, vecteurs propres

1.5.1 Définitions

Valeur propre, vecteur propre. λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ s'il existe un vecteur $\mathbf{k} \neq 0$ tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k} \quad (1.57)$$

$\mathbf{k}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre λ . Un vecteur propre est défini à une constante multiplicative près. En effet, d'après (1.57), si $\mathbf{k}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$, $a\mathbf{k}$ est aussi un vecteur propre pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.

Valeur propre multiple. La valeur propre est dite multiple si, pour un même λ , il existe plusieurs vecteurs propres non colinéaires vérifiant (1.57).

Détermination des valeurs propres d'une matrice

Si λ vérifie (1.57) alors

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{k} = 0, \mathbf{k} \neq 0 \implies |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (1.58)$$

Il suffit donc de chercher les valeurs de λ qui annulent le polynôme caractéristique $P(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$.

1.5.2 Expression d'une matrice dans la base de ses vecteurs propres

Si une matrice $m \times m$ possède m vecteurs propres indépendants, on dit qu'ils forment une base : tout vecteur peut être exprimé comme une combinaison de ces vecteurs propres. D'après (1.57), l'expression de $\mathbf{A}$ dans la base de ses vecteurs propres est la matrice diagonale suivante

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_i) \quad (1.59)$$

La matrice de passage de la base des vecteurs propres s'obtient en rangeant côte à côte tous les vecteurs propres de la matrice :

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_i \cdots \mathbf{k}_m] \quad (1.60)$$

et on a alors

$$\Lambda = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K} \quad (1.61)$$

1.5.3 Trace et déterminant

En utilisant les propriétés d'invariance de la trace et du déterminant par changement de base, on déduit que, pour une matrice $\mathbf{A}$ carrée de taille m , dont les valeurs propres sont λ_i ($i = 1, \dots, m$), la trace et le déterminant s'obtiennent directement à l'aide des valeurs propres.

$$\text{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (1.62)$$

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^m \lambda_i \quad (1.63)$$

1.6 Exercices

1.6.1 Inversion de matrice

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Si c'est le cas, trouver l'expression de leur inverse.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u - c & u + c \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

1.6.2 Gestion de projet

Un marché a été acquis par une entreprise pour la réalisation d'une étude. Celle-ci a été vendue 50kE sous l'hypothèse qu'elle serait réalisée par un ingénieur et un technicien. L'étude ne peut être effectuée si le technicien intervient à moins de 50% de son temps (il faut donc au minimum "un demi-technicien"). Un ingénieur, même à temps partiel, est nécessaire pour assurer l'encadrement et le suivi de l'étude. Le délai nécessaire à la réalisation de l'étude est de 6 mois.

1. Cas de figure 1 : le client demande à l'entreprise d'accélérer le rendu de l'étude et de raccourcir le délai à 4 mois, sans modification du montant. Il faudra donc affecter davantage d'ingénieurs et/ou de techniciens au projet. L'entreprise sait que chaque technicien supplémentaire travaillant sur le projet fera gagner 1 mois de délai mais coûtera 2kE supplémentaires à l'entreprise en termes de coûts d'encadrement. Chaque ingénieur supplémentaire intervenant sur le projet fera gagner 0,5 mois de délai et coûtera 5kE supplémentaire à cause des coûts de coordination de projet. Quel est le nombre optimal d'ingénieurs et de techniciens à faire intervenir sur le projet (un nombre non entier signifie que les personnels n'interviennent pas à 100% sur l'affaire mais consacrent une partie de leur temps à d'autres projets) ? Cette solution est-elle réaliste ? Quel est le délai minimal que l'entreprise peut espérer respecter ?
2. Cas de figure 2 : on s'aperçoit que l'étude a été sous-vendue de 5kE, c'est-à-dire que son coût réel a été sous-estimé dans le devis. L'entreprise doit donc réaffecter ses ressources humaines pour gagner 5kE, tout en conservant son personnel occupé pendant les 6 mois de l'étude. Quelle est la solution envisageable pour ce cas de figure ?

1.6.3 Brexit et algèbre linéaire

On dispose d'une somme E en euros (L en livres) et l'on souhaite couvrir une distance K en kilomètres (M miles terrestres). Le cours de la livre est de 1.11 euro. Un mile terrestre vaut 1609 m.

1. Ecrire la relation entre les vecteurs $[E, K]^T$ et $[L, M]^T$, en donnant les coefficients de la matrice de passage.
2. On dispose de 12 euros pour parcourir 30 miles. Combien cela fait-il de livres et de kilomètres ?

1.6.4 Valeurs propres et vecteur propres

Pour chacune des matrices ci-dessous, déterminer :

- les valeurs propres
- les vecteurs propres
- la matrice diagonale Λ associée à la matrice.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 5/3 & -4/3 \\ 4/3 & -5/3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

1.6.5 Transformations du plan

Déterminer la nature de la transformation à partir de la matrice. A quelle transformation du plan correspond chacune des matrices de l'exercice 1.6.4 ?

Remarque : il peut être intéressant d'utiliser les valeurs propres.

Déterminer la matrice à partir de la description de la transformation. Déterminer la matrice de chacune des transformations suivantes :

1. projection orthogonale sur l'axe x ,
2. projection sur l'axe x parallèlement à une direction faisant un angle θ avec l'axe x (figure 1.2, gauche),
3. rotation d'angle θ ,
4. symétrie par rapport à l'axe y ,
5. projection sur l'axe x , suivie d'une rotation d'angle θ ,
6. rotation d'angle θ , suivie d'une projection sur l'axe x ,
7. projection sur l'axe x suivie d'une symétrie par rapport à y ,
8. projection, sur la droite faisant un angle α avec l'axe x , parallèlement à une direction faisant l'angle β avec cette droite (figure 1.2, droite).

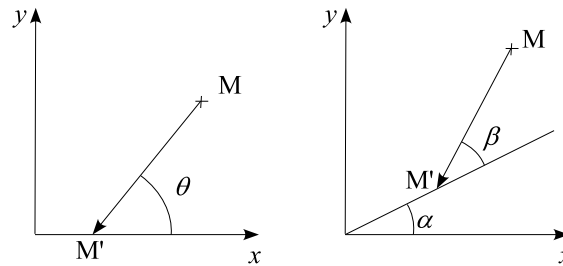


FIGURE 1.2 – Deux transformations du plan. Gauche : question 2 ; droite : question 8.

1.6.6 Chimie : chaîne de filiation

Un contaminant (radio-élément, pesticide ou autre contaminant) est sujet à la chaîne de dégradation suivante



où P_1 est le produit mère, P_2 est le produit fils et R est le résidu. On fait l'hypothèse que la réaction obéit à une cinétique linéaire

$$\frac{dc_1}{dt} = -k_1 c_1 \quad (1.67a)$$

$$\frac{dc_2}{dt} = k_1 c_1 - k_2 c_2 \quad (1.67b)$$

où c_1 et c_2 sont les concentrations de P_1 et P_2 . On cherche à déterminer c_1 et c_2 en fonction du temps et de leurs valeurs à $t = 0$.

1. Écrire les deux équations ci-dessus sous forme vectorielle, en donnant l'expression de la matrice $\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

2. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

3. On pose $\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{c}$, où $\mathbf{K}$ est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Montrer que $\mathbf{w}$ obéit à l'équation suivante :

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{w} \quad (1.69)$$

$\mathbf{\Lambda}$ étant la matrice diagonale formée par les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

4. En déduire l'expression de $\mathbf{w}$ à toute date $t > 0$, en supposant que la condition initiale $\mathbf{w}(t=0)$ est connue.
5. En tirer l'expression de $\mathbf{c}(t)$ en fonction des concentrations initiales à $t=0$.
6. La formule que vous avez obtenue n'est pas définie pour $k_1 = k_2$. Analysez le comportement de la solution pour la limite $k_1 - k_2 \rightarrow 0$.

1.6.7 Résoudre une équation différentielle du second ordre en utilisant uniquement des équations du 1er ordre

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -k^2U \quad (1.70)$$

où k est une constantes réelle. On suppose que les conditions initiales $U(t=0)$ et $\frac{dU}{dt}(t=0)$ sont connues.

On souhaite simplifier ce problème en ne conservant que des équations du 1er ordre, qui sont faciles à résoudre.

1. On introduit la variable auxiliaire $V = dU/dt$. A quel système d'équations d'ordre 1 les deux inconnues U et V obéissent-elles ?
2. écrire ce système sous la forme vectorielle

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

en précisant l'expression de $\mathbf{A}$.

3. En suivant les étapes 3 à 5 de l'exercice précédent, déterminer l'expression de $U(t)$ en fonction de $U(t=0)$ et $\frac{dU}{dt}|_{t=0}$.

Chapitre 2

Méthodes numériques pour les EDO

2.1 Vocabulaire

Une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) est une équation qui fait intervenir une variable dépendante U et une ou plusieurs de ses dérivées par rapport à une variable indépendante X :

$$F\left(X, U, \frac{dU}{dX}, \dots, \frac{d^m U}{dX^m}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Le plus haut degré de dérivation rencontré dans l'équation est appelé l'ordre de l'équation.

Si l'équation est une combinaison linéaire des différentes dérivées, l'équation est dite linéaire. Si les coefficients de la combinaison linéaire dépendent de X , l'EDO est quasi-linéaire. Dans tous les autres cas, l'EDO est non linéaire.

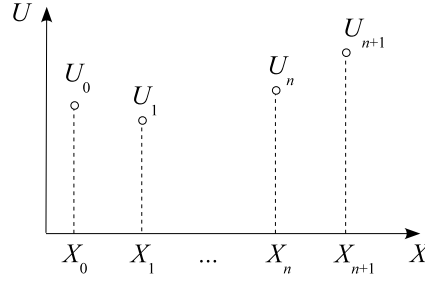
2.2 Principe de la discrétisation aux différences finies

Le principe est expliqué pour des EDO d'ordre 1, mais reste valable pour des EDO d'ordre plus élevé. L'objectif est de trouver une méthode générale pour résoudre des équations du type

$$\frac{dU}{dX} = f(U, X) \quad (2.2)$$

où f est une fonction connue de U et X . U est appelée la variable dépendante, X est la variable indépendante. Dans les problèmes d'ingénierie classiques, X est une coordonnée d'espace ou de temps.

Si l'expression de $f(U, X)$ est très compliquée, il est impossible de trouver la solution exacte (analytique) de (2.2). On va alors rechercher une solution approchée pour certaines valeurs de X définies à l'avance. Sur la Figure 2.1, U est recherchée aux valeurs prédéfinies $X_1, \dots, X_n$. Les valeurs de U correspondantes sont notées $U_1, \dots, U_n$. Les deux termes de l'équation (2.2) doivent être approchés en utilisant uniquement les valeurs $X_1, \dots, X_n$ et $U_1, \dots, U_n$.

FIGURE 2.1 – Discrétisation de X et U .

On pourra ainsi calculer les U_i de proche en proche à partir de la condition initiale.

2.3 Méthodes d'Euler

Méthode d'Euler explicite

Supposons que U_n soit connue et que l'on cherche à calculer U_{n+1} . Les deux approximations les plus évidents pour les termes de (2.2) sont :

$$\frac{dU}{dX} \approx \frac{U_{n+1} - U_n}{X_{n+1} - X_n} = \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta X} \quad (2.3a)$$

$$f(U, X) \approx f(U_n, X_n) \quad (2.3b)$$

Si l'on veut que U_{n+1} satisfasse l'équation, il faut substituer ces deux approximations dans (2.2) :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta X f(U_n, X_n) \quad (2.4)$$

Cette méthode est dite explicite car U_{n+1} est donnée explicitement en fonction de U_n .

Méthode d'Euler implicite

L'évaluation de la dérivée est la même, mais on utilise cette fois-ci la valeur inconnue U_{n+1} pour calculer f :

$$\frac{dU}{dX} \approx \frac{U_{n+1} - U_n}{X_{n+1} - X_n} = \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta X} \quad (2.5a)$$

$$f(U, X) \approx f(U_{n+1}, X_{n+1}) \quad (2.5b)$$

La substitution dans (2.2) donne :

$$U_{n+1} - \Delta X f(U_{n+1}, X_{n+1}) = U_n \quad (2.6)$$

Si la fonction f est non linéaire, cette équation n'a pas forcément de solution exacte. On peut être amené à utiliser une méthode de recherche de racine.

Méthode d'Euler semi-implicite

On peut également choisir d'estimer f "quelque part" entre X_n et X_{n+1} :

$$\frac{dU}{dX} \approx \frac{U_{n+1} - U_n}{X_{n+1} - X_n} = \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta X} \quad (2.7a)$$

$$f(U, X) \approx (1 - \theta) f(U_n, X_n) + \theta f(U_{n+1}, X_{n+1}), \quad \theta \in [0, 1] \quad (2.7b)$$

ce qui donne

$$U_{n+1} - \theta \Delta X f(U_{n+1}, X_{n+1}) = U_n + (1 - \theta) \Delta X f(U_n, X_n) \quad (2.8)$$

On remarque que (2.8) permet d'obtenir à la fois (2.4) (en posant $\theta = 1$) et (2.6) (en posant $\theta = 0$).

2.4 Méthodes de Runge-Kutta

2.4.1 Méthode RK2

$$U_{n+\frac{1}{2}} = U_n + \frac{\Delta X}{2} f(U_n, X_n) \quad (2.9a)$$

$$X_{n+\frac{1}{2}} = X_n + \frac{\Delta X}{2} \quad (2.9b)$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta X f\left(U_{n+\frac{1}{2}}, X_{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.9c)$$

2.4.2 Méthode RK4

$$f^{(1)} = f(U_n, X_n) \quad (2.10a)$$

$$X_{n+\frac{1}{2}} = X_n + \frac{\Delta X}{2} \quad (2.10b)$$

$$f^{(2)} = f\left(U_n + \frac{\Delta X}{2} f^{(1)}, X_{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.10c)$$

$$f^{(3)} = f\left(U_n + \frac{\Delta X}{2} f^{(2)}, X_{n+\frac{1}{2}}\right) \quad (2.10d)$$

$$f^{(4)} = f\left(U_n + \Delta X f^{(3)}, X_{n+1}\right) \quad (2.10e)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\Delta X}{6} \left(f^{(1)} + 2f^{(2)} + 2f^{(3)} + f^{(4)}\right) \quad (2.10f)$$

2.5 Consistance, stabilité, convergence

Les méthodes numériques étant des approximations, il faut que la solution numérique (approchée) puisse être rendue aussi proche que possible de la solution exacte. Les notions de consistance, de stabilité et de convergence permettent de déterminer si c'est effectivement le cas.

2.5.1 Consistance

Définition. L'EDO discrétisée est dite consistante à l'EDO réelle si elle lui devient équivalente quand on fait tendre ΔX vers 0.

Analyse. On montre comment effectuer une analyse de consistance sur l'EDO

$$\frac{dc}{dt} = -kc \quad (2.11)$$

et sa discrétisation explicite :

$$c_{n+1} = (1 - k\Delta t) c_n \quad (2.12)$$

L'analyse de consistance comporte 4 étapes :

1. Choisir un point de référence dans la discrétisation. Dans cet exemple, ce sera la date t_n .
On pose :

$$c \equiv c_n \quad (2.13)$$

2. Exprimer tous les autres termes de la discrétisation en fonction de ce point de référence à l'aide de développements en série de Taylor. Ici, le seul autre terme est c_{n+1} , que l'on peut exprimer comme

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + \Delta t \frac{dc}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2c}{dt^2} + \dots \\ &= c + \Delta t \frac{dc}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2c}{dt^2} + \dots \\ &= c + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k c}{dt^k} \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. Substituer le développement en série de Taylor dans la discrétisation

$$c + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k c}{dt^k} = (1 - k\Delta t) c \quad (2.15)$$

4. Simplifier et essayer de faire apparaître l'EDO que l'on cherche à résoudre :

- (a) on élimine c , qui apparaît des deux côtés du signe $=$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k c}{dt^k} = -k\Delta t c \quad (2.16)$$

- (b) on récrit la somme en faisant apparaître la dérivée première car elle figure dans l'EDO originale (on décale l'indice de départ, $k = 2$ au lieu de $k = 1$) :

$$\Delta t \frac{dc}{dt} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k c}{dt^k} = -k\Delta t c \quad (2.17)$$

- (c) on simplifie par Δt et on fait passer la somme du côté droit de l'équation :

$$\frac{dc}{dt} = -kc - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\Delta t^{k-1}}{k!} \frac{d^k c}{dt^k} \quad (2.18)$$

Lorsque Δt tend vers 0, la somme tend vers 0 car elle est composée de puissances de Δt supérieures à 0. Alors l'équation ci-dessus devient équivalente à l'EDO (2.11) que l'on cherche à résoudre. La discrétisation est donc bien consistante.

2.5.2 Stabilité

Définition. La solution (numérique ou analytique) d'une équation est stable si elle est bornée.

Analyse. Pour une équation homogène (sans second membre), une condition suffisante de stabilité est

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| \leq 1 \quad (2.19)$$

2.5.3 Convergence

Définition. On dit que la solution numérique d'une EDO converge vers la solution analytique si elle s'en rapproche indéfiniment lorsque ΔX tend vers 0.

Théorème de Lax. Il est difficile de prouver la convergence au sens numérique. Le théorème de Lax permet de la relier à la consistance et à la stabilité.

Pour une EDO linéaire à coefficients constants, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Consistance} \\ \text{ET} \\ \text{Stabilité} \end{array} \right\} \iff \text{Convergence} \quad (2.20)$$

Corollaire : une solution numérique instable ne peut pas converger vers la solution analytique. Donc, ne jamais chercher à calculer numériquement une solution instable, car la solution numérique ne peut pas converger, même lorsque ΔX tend vers 0.

2.6 Exercices

2.6.1 EDO d'ordre 1 linéaire

1. Appliquer les méthodes d'Euler explicite, implicite et semi-implicite à l'équation de dégradation linéaire :

$$\frac{dc}{dt} = -kc \quad (2.21)$$

2. En tirer l'expression de c_{n+1} en fonction de c_n pour chacune de ces méthodes.
3. Comparer le ratio $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ des trois discrétisations au ratio $\frac{c(t_{n+1})}{c(t_n)}$ de la solution analytique. Faire un développement en série de Taylor à l'ordre 2 et en déduire quelle est la méthode la plus précise.
4. Déduire du ratio précédent le domaine de stabilité de la méthode.

2.6.2 EDO non linéaire

Mêmes questions que l'exercice précédent pour l'équation suivante :

$$\frac{dc}{dt} = -kc^a \quad (2.22)$$

où a est une puissance positive, mais différente de 1.

Remarque : pour la question 2, avec la méthode implicite, on utilisera une linéarisation :

$$c_{n+1}^a \approx c_n^{a-1} c_{n+1} \quad (2.23)$$

2.6.3 Filiation/dégradation

1. Appliquer la méthode d'Euler explicite au problème

$$\frac{dc_1}{dt} = -k_1 c_1 \quad (2.24a)$$

$$\frac{dc_2}{dt} = k_1 c_1 - k_2 c_2 \quad (2.24b)$$

étudié de façon théorique dans la section 1.6.6.

2. Indiquer la valeur maximale de Δt pour laquelle la solution est stable.
3. Comparer à la solution analytique pour le jeu de paramètres du tableau 2.1.

Symbole	Signification	Valeur numérique
$c_1^{(0)}$	concentration c_1 initiale	1
$c_2^{(0)}$	concentration c_2 initiale	0
k_1	constante de dégradation de P_1	1 s^{-1}
k_{12}	constante de dégradation de P_2	$0,5 \text{ s}^{-1}$
T	durée simulée	5 s
Δt	pas de temps de calcul	0,25 s, 0,5 s, 1 s

TABLE 2.1 – Paramètres du problème de dégradation/filiation

2.6.4 Hydraulique à surface libre : calcul de ligne d'eau

La profondeur h dans un écoulement unidimensionnel en chenal prismatique obéit à l'EDO suivante :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F^2} \quad (2.25a)$$

$$F = \frac{u}{c}, \quad u = \frac{Q}{A}, \quad c = \left(\frac{gA}{b} \right)^{1/2} \quad (2.25b)$$

$$S_f = \frac{|u|u}{K^2} R_H^{-4/3}, \quad R_H = \frac{A}{\chi} \quad (2.25c)$$

où A est la section mouillée, b est la largeur au miroir, c est la vitesse de propagation des ondes de surface dans l'eau au repos, F est le nombre de Froude, g est l'accélération de la pesanteur, K est le coefficient de Strickler, Q est le débit, R_H est le rayon hydraulique, S_0 et S_f sont respectivement la pente du cours d'eau et de la ligne de charge, u est la vitesse, χ est le périmètre mouillé.

1. Pour un canal rectangulaire (b indépendant de h), discrétiser l'équation de la ligne d'eau à l'aide de la méthode d'Euler explicite, puis de la méthode RK2.
2. Que se passe-t-il si la profondeur de l'écoulement devient telle que u et c sont identiques ? Proposer une méthode pour améliorer la précision du calcul dans ce type de situation.

2.6.5 Particule dans un champ de vitesse tournant (examen 2016/17)

Le système d'EDO suivant

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y \quad (2.26a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x \quad (2.26b)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0 \quad (2.26c)$$

a pour solution une équation de cercle (c'est le mouvement d'une particule décrivant un cercle de rayon x_0 autour du point $(0,0)$ avec une vitesse angulaire ω) :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

$$y(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (2.28)$$

1. Discrétiser le système (2.26a, 2.26b) par la méthode d'Euler explicite. Donner les expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .
2. Discrétiser ce système par la méthode d'Euler implicite. Donner les expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .
3. Analyse de la méthode explicite :
 - (a) montrer qu'avec cette méthode, la solution numérique ne reste pas sur le cercle de rayon x_0 (on conseille d'étudier l'évolution du carré de la distance à l'origine, $D^2 = x^2 + y^2$, entre les dates n et $n+1$).
 - (b) Quelle est la stabilité de la solution avec cette méthode ? Ce problème peut-il être résolu en diminuant Δt ?
4. Analyse de la méthode implicite :
 - (a) montrer que la solution implicite ne reste pas non plus sur le cercle.
 - (b) Quelle est la stabilité de la solution implicite ? Ceci est-il cohérent avec ce qui a été vu en cours sur le comportement des méthodes implicites ?